UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA

FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS

CURSO DE NIVELACIÓN

GUÍA DE ESTUDIOS

AUTORES:
Ing. Carlos G. Herrera
Ing. Oscar E. Moreno
Dra. Erlinda del Valle Ortiz
Ing. Matías Ferraro

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA

CONTENIDOS

GUIA DE ESTUDIO N° 1

TEMA: EL CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

1 - EL CONJUNTO DE NÚMEROS REALES R.

El conjunto de números reales se lo puede representar esquemáticamente de la siguiente manera:

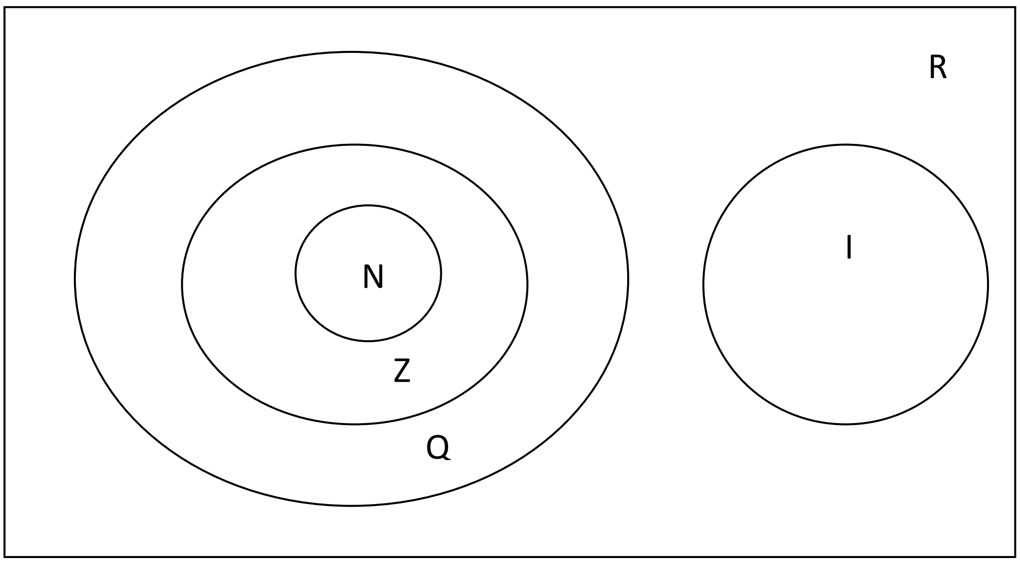


Gráfico 1: El conjunto de números reales R.

Se puede observar en el Gráfico 1 que el conjunto R incluye a los números racionales Q e irracionales I. A su vez el conjunto Q incluye el de números enteros Z, que incluye a el conjunto de números naturales N.

N - Conjunto de Números Naturales
Z - Conjunto de Números Enteros
Q – Conjunto de Números Racionales
I – Conjunto de Números Irracionales
R – Conjunto de Números Reales

OPERACIONES EN R.

1.1 - SUMA O ADICIÓN. PROPIEDADES

Sean A, B, C números reales. El conjunto de números reales cumple las siguientes propiedades para la suma:

1) Asociativa (A+B)+C = A + (B+C)
2) Existencia de Elemento Neutro A + 0 = 0 + A = A
3) Inverso Aditivo A + (-A) = 0
4) Conmutativa A + B = B + A

Actividad 1: analizar si las propiedades enumeradas se verifican en los conjuntos de números naturales N, enteros Z y racionales Q.

1.2 - MULTIPLICACIÓN O PRODUCTO EN R. PROPIEDADES

Sean A, B, C números reales. El producto de números reales cumple las siguientes propiedades:

1) Asociativa (A.B).C = A.(B.C)
2) Conmutativa A.B = B.A
3) Distributiva respecto a la suma A.(B + C) = A.B + A.C
4) Elemento Neutro para el producto 1.A = A

Actividad 2: Sean a, b, c, d números reales. Analizar si se verifica la siguiente igualdad indicando las propiedades utilizadas:
a.[b.(c + d)] = (c+d).(a.b)

1.3 - POTENCIACIÓN EN R. PROPIEDADES

Se define la potenciación como la multiplicación de un número real "a" n veces:

a^n = a.a……a (n veces) = b

a – Base

n – Exponente

b – Potencia enésima

La potenciación en **R** verifica las siguientes propiedades:

PROPIEDADES

1) $a^0 = 1$ (Todo número elevado a la potencia 0 es igual a 1)
2) $a^1 = a$ (Todo número elevado a la potencia 1 es igual a si mismo).
3) $a^m.a^n = a^{m+n}$ (Producto de potencias de igual base).
4) $a^m:a^n = a^{m-n}$ (Cociente de potencias de igual base).
5) $(a^m)^n = a^{m.n}$ (Potencias de potencias)
6) $(a.b)^n = a^n.b^n$
7) $a^{-n} = (1/a)^n$

Actividad 3: Resolver la siguiente operación indicando las propiedades utilizadas:
$$[[(a.b)^2.c^3]^3.[a^2b]^5]^2$$

1.4 - RADICACIÓN EN R

Se define la raíz enésima de un número real "**a**" a un número real "**b**" tal que **b** elevado a la potencia enésima es igual a **a**.

$$\sqrt[n]{a} = b$$

n – Indice
a – Radicando
b – Raíz enésima del número a.

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

La radicación de números reales cumple las siguientes propiedades:

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$
2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
3) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$
4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}$
6) $\left(\sqrt[n]{a^m}\right) = a^{m/n}$
7) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
8) $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$

Actividad 4: Determinar, indicando las propiedades de la radicación utilizadas, si se verifica la siguiente igualdad:

$\sqrt[4]{a^3b^2}.\sqrt[4]{ab^2} = a.b$

2 - RADICALES ARITMÉTICOS

Un radical aritmético se compone de una raíz de cualquier índice en cuyo radicando aparecen indicados factores numéricos o literales (o ambos a la vez), afectada de un factor o coeficiente (que también puede ser numérico o literal), con su correspondiente signo.

Por ejemplo: $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt[8]{72\, a^4\, b^6\, c^5}$

Estas expresiones generalmente se suelen reducir a expresiones más sencillas, lo cual se puede efectuar mediante simplificación, o mediante extracción de factores fuera del radical.

2.1 - REDUCCIÓN DE RADICALES ARITMÉTICOS

A los efectos de proceder a su simplificación, es necesario previamente descomponer en factores primos a los factores numéricos que aparecen dentro del radicando; luego de lo cual, se tiene que verificar que tanto los exponentes de los números como los de las letras, sean múltiplos del índice, o por lo menos, que tengan un divisor común con el mismo.

Ejemplo N° 1: $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{64\, a^3\, b^9\, c^6} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{6}}\, a^{\cancel{3}}\, b^{\cancel{9}}\, c^{\cancel{6}}}$$

$= \frac{1}{2} \cdot 2^2 a\, b^3 c^2$

$= 2\ a\, b^3 c^2$

2.2 - EXTRACCIÓN DE FACTORES FUERA DEL RADICAL

La operación de simplificación de radicales es poco frecuente, debido a la condición que debe reunir el radicando citada más arriba. Mucho más común que ella, es la extracción de factores fuera del radical; para lo cual, se procede primero a descomponer los números del radicando en factores primos, de la misma forma que para el caso anterior; pero a continuación de ello, se extraen los factores afuera del radical dividiendo el exponente de cada factor, por el índice del radical. Aquellos factores del radicando cuyos exponentes sean menores que el índice, no pueden ser extraídos, y quedan adentro del radical.

EJEMPLO:

$$\sqrt[3]{192\, x^2\, y^3\, z^9} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3 \cdot\ x^2\, y^3\, z^9}$$

$$= 2^2 \cdot y\ \cdot z^3 \cdot \sqrt[3]{3\ x^2}$$

$$= 4\ \cdot y\ \cdot z^3 \cdot \sqrt[3]{3\ x^2}$$

Actividad 5: Analizar las propiedades de la radicación utilizadas en la simplificación del ejemplo anterior.

Si en el radicando aparecen factores cuyos exponentes, siendo mayores que el índice, no son múltiplos de él (no lo contienen un número exacto de veces), éstos se proceden a descomponer en el producto de dos factores de igual base, cuyos exponentes se eligen de modo que, uno de ellos sea el mayor múltiplo del índice que sea menor al exponente dado, y el otro, la diferencia entre el exponente original y este nuevo exponente. Luego se procede a extraer todos los factores que fueran posibles.

EJEMPLO:

$$\sqrt[3]{81\, a^5\, b^6\, c^7} = \sqrt[3]{3^4 \cdot a^5\, b^6\, c^7}$$

$$= \sqrt[3]{3^3 \cdot 3 \cdot a^3\, a^2\, b^6\, c^6\, c}$$

$$= 3\,a\,b^2 c^2 \cdot \sqrt[5]{3\,a^2\,c}$$

Actividad 6: Analizar las propiedades de la radicación utilizadas en la extracción de factores del ejemplo anterior.

2.3 - RADICALES SEMEJANTES

Dos o más radicales se consideran semejantes, si tienen exactamente la misma raíz (con el mismo índice), y los mismos factores elevados a idénticas potencias adentro del radicando, y solo difieren en el coeficiente que aparece fuera de la raíz-

Son ejemplos de radicales semejantes los siguientes:

$$\frac{5}{2} \cdot \sqrt[4]{25\,a^4\,b^6\,c^5};\ -3 \cdot \sqrt[4]{25\,a^4\,b^6\,c^5};\ 2 \cdot \sqrt[4]{25\,a^4\,b^6\,c^5}; etc.$$

$$\sqrt{2\,x^2\,y^3};\ -7 \cdot \sqrt{2\,x^2\,y^3};\ \frac{5}{3} \cdot \sqrt{2\,x^2\,y^3};\ etc.$$

Actividad 7: Indique cuáles de los siguientes radicales aritméticos son semejantes. Recordar que deben ser reducidos antes de comparar:

$\sqrt{8}; \sqrt{2}; \sqrt{9}; \sqrt{27}; \sqrt{18}; \sqrt{12}$

3 - OPERACIONES CON RADICALES ARITMETICOS

3.1 - ADICION O SUMA

Para poder sumar los radicales aritméticos, estos deben ser semejantes. Previamente a realizar la operación suma se deben reducir los mismos. Se suman algebraicamente los coeficientes de los radicales:

EJEMPLO

$$\sqrt{8} + \sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{18}$$

Reduciendo los radicales

$$2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

Agrupando radicales semejantes:

$$(2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + (\sqrt{3} + 2\sqrt{3})$$

Cuyo resultado es:

$$5\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Actividad 8: Calcule el perímetro de un rectángulo que tiene como lados $\sqrt{75}$ y $\sqrt{12}$

3.2 - MULTIPLICACIÓN DE DE RADICALES DE IGUAL INDICE

La multiplicación de radicales de igual índice es igual a un radical del mismo índice cuyo radicando se obtiene de la multiplicación de los radicandos de cada uno de los factores del producto. El coeficiente del producto se obtiene de la multiplicación de los respectivos coeficientes de cada uno de los radicales que se multiplican:

EJEMPLO:

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{12x^2y}.(-\frac{3}{5}\sqrt[3]{2xy^2z})$$

Descomponiendo los radicandos en factores primos:

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{2^2.3x^2y}.(-\frac{3}{5}\sqrt[3]{2xy^2z})$$

Multiplicando los coeficientes y multiplicando los radicandos en una sola raíz:

$$\frac{-2}{5}\sqrt[3]{2^3.3x^3y^3z}$$

Extrayendo factores fuera del radical se obtiene el resultado del producto:

$$\frac{-4}{5}xy\sqrt[3]{3z}$$

Actividad 9: Indique las propiedades de la potenciación y radicación utilizadas en cada uno de los pasos de la resolución del ejemplo anterior.

3.3 - MULTIPLICACIÓN DE RADICALES DE DISTINTO INDICE

En este caso se deben convertir los radicales de distinto índices en radicales de igual índice, que es el mínimo común múltiplo de los radicales, para poder multiplicar como radicales de igual índice:

EJEMPLO:

$$(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b})(-4\sqrt{ab})$$

Se deben convertir los radicales en radicales de índice 6 que es el mínimo común múltiplo de 2 y 3. Recordar que al multiplicar el índice por una constante k, el radicando se debe elevar a la potencia k.

$$(-\frac{1}{2}\sqrt[6]{a^4b^2})(-4\sqrt[6]{a^3b^3})$$

Ahora se pueden multiplicar como radicales de igual índice:

$$2\sqrt[6]{a^7b^5}$$

Extrayendo factores fuera del radical

$2a\sqrt[6]{ab^5}$

Actividad 10: Indique las propiedades de la potenciación y radicación utilizadas en cada uno de los pasos de la resolución del ejemplo anterior.

3.4 - POTENCIACIÓN

Para elevar un radical aritmético a una potencia enésima se deben aplicar las propiedades de la radicación y potenciación según sean necesarias:

EJEMPLO

$$\left(-\frac{2}{5}\sqrt[4]{x^2y}\right)^3$$

Se aplica la regla de los signos y se elevan a la potencia 3 el coeficiente y el radical.

$$\left(-\frac{2}{5}\sqrt[4]{x^2y}\right)^3 = -\frac{8}{125}\left(\sqrt[4]{x^2y}\right)^3$$

Resultando:

$$-\frac{8}{125}\sqrt[4]{x^6y^3}$$

Extrayendo factores

$$-\frac{8}{125}x\sqrt[4]{x^2y^3}$$

4 - RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Consiste en realizar operaciones algebraicas sobre expresiones racionales a los fines de elmininar los radicales aritméticos del denominador.

4.1 - DENOMINADORES DE LA FORMA $\sqrt[n]{a}$

En este caso se multiplica numerador y denominador de la expresión racional por un radical de igual índice a del denominador a los efectos de lograr un radical en el denominador en el que el exponente del radicando sea igual al índice del radical.

EJEMPLO

Racionalizar la expresión

$$\frac{2a^2b}{\sqrt[3]{4a^2b}}$$

Se descompone en factores primos el radicando

$$\frac{2a^2b}{\sqrt[3]{2^2a^2b}}$$

Ahora se multiplica numerador y denominador por la expresión: $\sqrt[3]{2ab^2}$ obteniéndose:

$$\frac{2a^2b}{\sqrt[3]{2^2a^2b}}\frac{\sqrt[3]{2ab^2}}{\sqrt[3]{2ab^2}}$$

Realizando las operaciones algebraicas:

$$\frac{2a^2b.\sqrt[3]{2ab^2}}{\sqrt[3]{2^3a^3b^3}}$$

Como el exponente del radicando es igual al índice del radical aritmético se puede simplificar:

$$\frac{2a^2b.\sqrt[3]{2ab^2}}{\sqrt[3]{(2ab)^3}}$$

El resultado es:

$$\frac{2a^2b.\sqrt[3]{2ab^2}}{2ab}=2a.\sqrt[3]{2ab^2}$$

Actividad 11: Indique las propiedades de la potenciación y radicación utilizadas en cada uno de los pasos de la resolución del ejemplo anterior.

4.2 - DENOMINADORES DE LA FORMA BINOMICA $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ se multiplica numerador y denominador por la expresión conjugada $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ para poder realizar las simplificaciones correspondientes:

EJEMPLO

$$\frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

Multiplicando y dividiendo por el binomio conjugado del denominador:

$$\frac{4}{\left(2+\sqrt{2}\right)}\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

Resultando

$$\frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{2^2-(\sqrt{2})^2}$$

Simplificando queda

$$\frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}=\frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2\left(2-\sqrt{2}\right)$$

Actividad 12: Indique las propiedades de la potenciación y radicación utilizadas en cada uno de los pasos de la resolución del ejemplo anterior.

5 - GUIA DE EJERCICIOS

EJERCICIO 1: coloque el símbolo $\subset \acute{o} \supset$ según corresponda:

a) Q………Z
b) N………Z
c) Q………R
d) Q………I

EJERCICIO 2: Sea el conjunto $S = \{23;3/5;\sqrt{5};-18;.4.2;\pi,-7/2\}$. Indique:

a) S ∩ Q
b) S ∩ N
c) S ∩ I
d) S ∩ Z

EJERCICIO 3: Indique las propiedades de las operaciones de números reales que justifiquen cada una de las siguientes igualdades:

a) (a+b)+3 = (b+a) + 3
b) 3/5 + (-3/5) = 0
c) (a-b) + [-(a+b)] = 0
d) x.(y+0) + z = xy + z
e) [(w+3).2].z = z[6+2w]

EJERCICIO 4: enuncia una de las propiedades de operaciones de números reales necesaria para justificar el siguiente enunciado:

a) y + z = k + z $\Rightarrow$ y = k
b) c $\neq$ 0 a.c = b.c $\Rightarrow$ a = b

EJERCICIO 5: ¿Qué condición debe imponerse para que el siguiente enunciado sea verdadero?

y.x + z = y + z.x $\Rightarrow$ y = z

EJERCICIO 6: si el inverso de un número real a-4 es 1/5, cuál es el opuesto de a+1?

EJERCICIO 7: Ordenar de menor a mayor los siguientes números reales:

½; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; π ; $-\frac{7}{8}$; $-\frac{1}{5}\sqrt{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-3\sqrt{3}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 0

EJERCICIO 8: Clasifique los siguientes números en racionales o irracionales:

π ; $\frac{3}{2}$; 0,3333…; 0,5; $-\frac{1}{5}\sqrt{3}$; 0; 0,73737373….;

EJERCICIO 9: Reducir los siguientes radicales aritméticos

$$\sqrt{32}\ ;\ 2\sqrt{27}\ ;\ \sqrt{108}\ ;\ \sqrt[3]{b^{10}}\ ;\ \sqrt[3]{a^{15}b^{14}}\ ;\ \sqrt[3]{320}\ ;\ \sqrt{b27}\ ;\ 3\sqrt{3}\ ;\ \frac{1}{2}\sqrt{8}$$

EJERCICIO 10: Indique cuáles de los siguientes radicales aritméticos son semejantes:

$$\sqrt{32}\ ;\ 2\sqrt{27}\ ;\ \sqrt{108}\ ;\ \sqrt[3]{b^{10}}\ ;\ \sqrt[3]{a^{15}b^{14}}\ ;\ \sqrt[3]{320}\ ;\ \sqrt{b27}\ ;\ 3\sqrt{3}\ ;\ \frac{1}{2}\sqrt{8}$$

EJERCICIO 11: Resolver las siguientes operaciones con radicales aritméticos

a) $\frac{1}{2}\sqrt{8}+\sqrt{2}-3\sqrt{32}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{27}-5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{5}-2\sqrt{2}+\sqrt{8}-\frac{1}{3}\sqrt{125}-4\sqrt{50}$

c) $\sqrt{27}-\sqrt{8}+\frac{2}{3}\sqrt{8}+2\sqrt{32}-\sqrt{3}$

d) $\sqrt{50}.\sqrt{100}.\sqrt{8}$

e) $\sqrt[4]{a^3b}.\sqrt[4]{a^2b^3c}$

f) $\sqrt[3]{a^2b}.\sqrt[4]{a^2b^3c}.\sqrt{abc}$

g) $\sqrt[3]{32}.\sqrt[4]{50}.\sqrt{100}$

h) $\sqrt[5]{a^4b^3c}:\sqrt[5]{a^2b^2c}$

i) $\sqrt[3]{a^2b^2}:\sqrt[2]{a\ b}$

j) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

k) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}:\sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

EJERCICIO 12: Hallar el valor de "x" en la expresión $\sqrt{2}(x-\sqrt{3})+5\sqrt{6}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

EJERCICIO 13: Racionalizar denominadores

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{ab^3}}$

e) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

EJERCICIO 14: Resolver los siguientes ejercicios de potenciación:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ c) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^3$ d) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^4$

e) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^3\left(-\dfrac{3}{5}\right)^5\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2$ f) $\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5\right]:\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2$

g) $\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2.\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)^3$

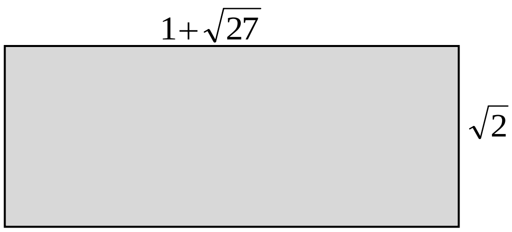
h) $\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2:\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)^3$

i) $\left(\dfrac{a^2b^3c}{ab}\right)^4$

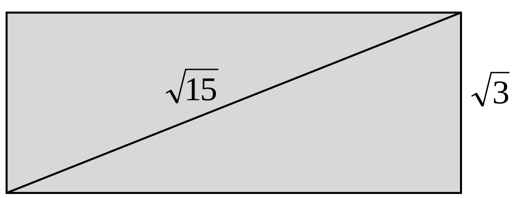
j) $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}:\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right)^2.\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3$

6 - PROBLEMAS DE APLICACIÓN

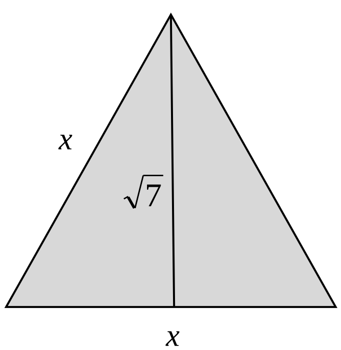
1) Calcular el área de la siguiente figura:



2) Hallar el perímetro de la siguiente figura



3) Calcular el área de la siguiente figura:



4) Si la altura de un triángulo rectángulo es la mitad de la base y el área es de 64 m2, calcula la medida de la base y de la altura.

5) Si se duplica la longitud de un lado de un cubo, ¿Se duplica el área?, ¿y su volumen?. Si la longitud del lado aumenta k veces ¿Cuántas veces aumenta el área y el volumen?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA

GUIA DE ESTUDIO N° 2

TEMA: VECTORES. MAGNITUDES

1 - VECTORES. OPERACIONES CON VECTORES

Cuando una cantidad física se describe con un solo número, decimos que es una **cantidad escalar**. En cambio, una **cantidad vectorial** tiene tanto una **magnitud** (el módulo) como una **dirección** en el espacio y un **sentido**. La rapidez a diferencia de la velocidad es un valor escalar del desplazamiento recorrido por unidad de tiempo. Mientras que la velocidad es una cantidad vectorial que incluye magnitud, dirección y sentido. Los vectores se pueden representar gráficamente mediante un segmento orientado. La representación gráfica de un vector puede observarse en Figura 1.

.

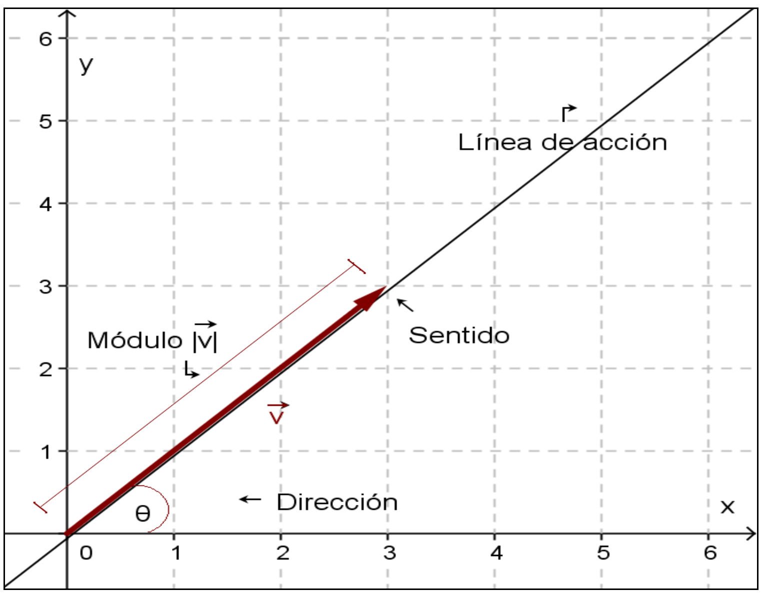


Figura 1: Representación de un vector

Analíticamente un vector en el plano se representa como un par ordenado. Por ejemplo el vector de la Figura 1 tiene coordenadas (3, 3)

1.1 - SUMA DE VECTORES. PROPIEDADES

Los vectores se suman analíticamente componente a componente. Sean los vectores A = (a, b) y **B**= (c, d). La suma A+B es:

A + **B** = (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)

Gráficamente se suma aplicando la regla del paralelogramo según se observa en Figura 2.

PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES

Sean los vectores A, B, C. Se verifican las siguientes propiedades:

1) Asociatividad [**A**+**B**]+**C** = **A** + [**B**+**C**]
2) Elemento neutro para la suma **A**+**N** = **N**+**A** **N = (0, 0)**

3) Opuesto para la su**ma A**+**B = B**+**A** = **N** **B = -A**
4) Conmutatividad **A**+**B = B**+**A**

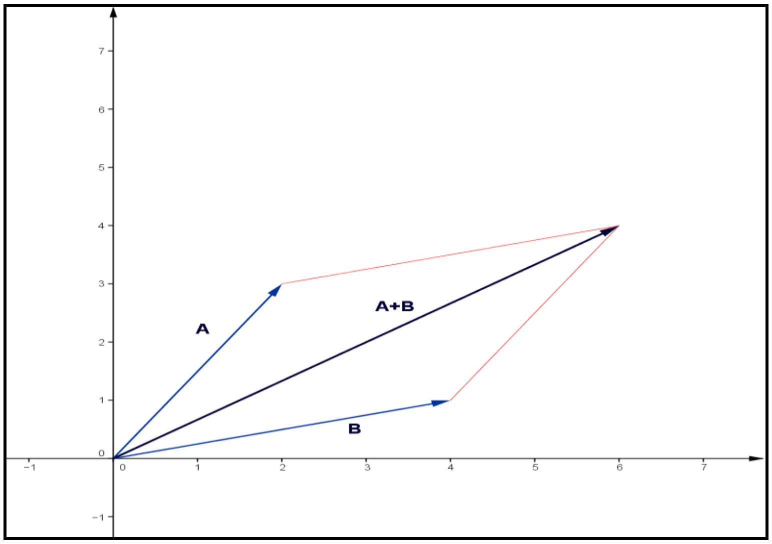


Figura 2: Suma de vectores. Regla del paralelogramo.

Actividad 1: Sean los vectores A=(1, 1), B=(1, -2) y C=(0, 2). Resolver analítica y gráficamente la siguiente operación

A + (**B** + **C**)

Resolver la misma operación asociando de la siguiente manera:

C + (**A** + **B**)

1.2 - MULTIPLICACIÓN DE VECTOR POR ESCALAR. PROPIEDADES

La multiplicación de un vector A = (a,b) por un escalar k se realiza multiplicando cada uno de las componentes del vector por el escalar k

k.A = k.(a, b) = (ka, kb)

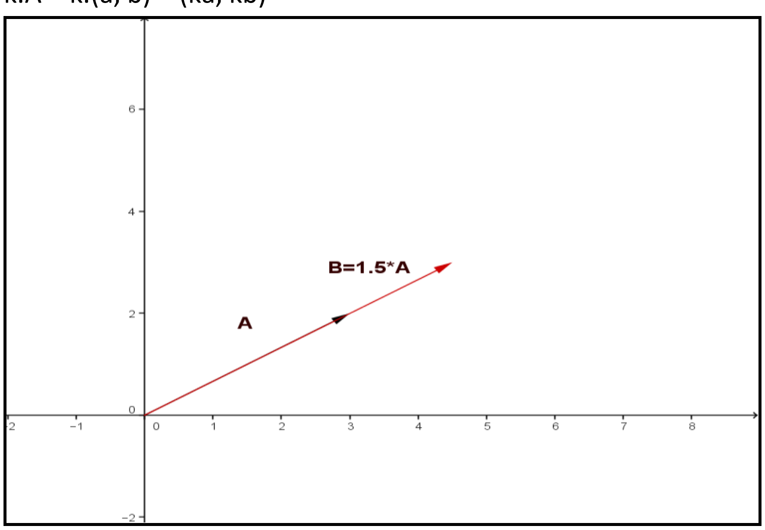


Figura 3: Multiplicación de vector por escalar.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Sean los vectores A, B y los escalares k, u. La multiplicación por escalar verifica las siguientes propiedades.

1) Asociatividad mixta k(u.**A**) = (k.u).**A**
2) Distributiva respecto a la suma de escalares (k+u).**A**=k.**A** + u.**A**
3) Distributiva respecto a la suma de vectores k.(**A+B**) = k.**A** + k.**B**
4) El escalar k = 1 es elemento neutro para la multiplicación de vector por escalar 1.**A** = **A**

Actividad 2: Sean los vectores A = (1. 2) y B =(-2, 4). Resolver analíticamente y gráficamente la siguiente operación aplicando la propiedad distributiva del producto de escalares por la suma de vectores:
(-3) (**A** + **B**)

1.3 - MODULO DE UN VECTOR

Se calcula aplicando el teorema de Pitágoras. Sea el vector A = (a, b), el módulo del vector A es igual a:

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Actividad 3: Calcular el módulo del vector A = (3, -4). Determinar un vector unitario en la dirección del vector A.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean los puntos A =(x_A, y_A) y B = (x_B, y_B). La distancia entre los puntos A y B se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$|A - B| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Actividad 4: Determinar la distancia entre los puntos A = (-2 , 4) y B = (3, 2). Determinar asimismo la distancia entre el punto A y el origen del sistema de coordenadas.

1.4 - DESCOMPOSICIÓN ANALÍTICA DE UN VECTOR EN DOS DIRECCIONES DADAS

Sea un vector F de módulo 10. Las componentes horizontal y vertical del vector F son las siguientes:

Fx = F.cos θ

Fy = F. sen θ

Se observa la descomposición en figura 4:

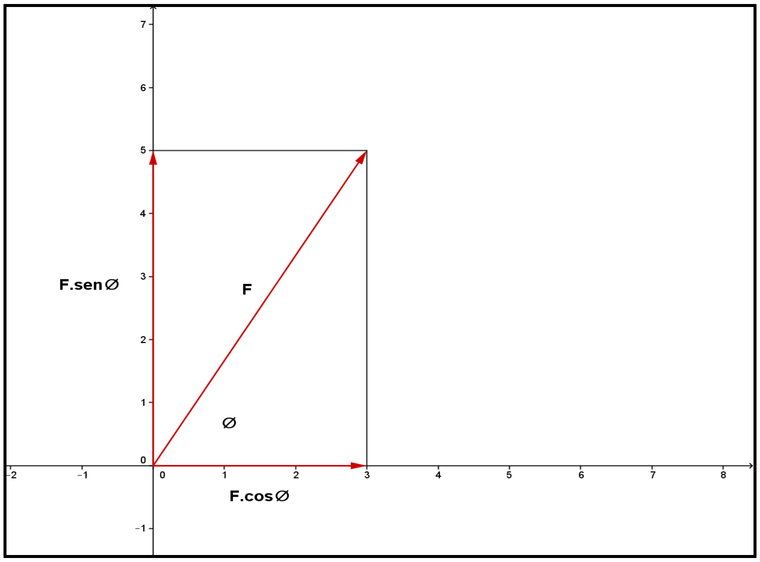


Figura 4: Descomposición de un vector en dos direcciones

Actividad 5: Sea un cuerpo de Peso P = 100 N que desciende por un plano inclinado. Descomponer dicho peso en direcciones normal y tangencial al plano inclinado, siendo el ángulo de inclinación igual a 30 grados.

2 – MAGNITUDES. ANPALISIS DIMENSIONAL

Un numero empleado para describir cuantitativamente un fenómeno físico es una cantidad física. Algunas cantidades físicas se las pueden definir describiendo la forma de medirlas; o describiendo la forma de calcularla a partir de otras cantidades. Medir una cantidad, es comparar con un estándar de referencia. Dicho estándar define una unidad de la cantidad. Por ejemplo: el metro es una unidad de distancia; el Newton una unidad de fuerza o el segundo, de tiempo. Al describir una cantidad física con un número, siempre debemos especificar la unidad empleada; por ejemplo 2 metros, 9 Newton o 15 segundos.
Algunas cantidades físicas, como tiempo, temperatura, masa y densidad se pueden describir completamente con un número y una unidad pero otras cantidades importantes están asociadas con una *dirección* y un *sentido*, por ejemplo la *fuerza.* Para describir plenamente una fuerza hay que indicar no solo su intensidad, sino también en qué dirección o sentido.

ANALISIS DIMENSIONAL
Las magnitudes físicas están asociadas siempre a su respectiva unidad. Por ejemplo la magnitud tiempo (escalar) tiene como unidad en el Sistema Internacional a el segundo [s]. Las unidades fundamentales de la mecánica son la longitud, masa y tiempo y sus unidades son el metro [m]; kilogramo [kg] y el segundo [s] respectivamente. Las magnitudes más complejas de la mecánica están expresadas en unidades que son combinaciones de las unidades fundamentales.

EJEMPLO: El análisis dimensional de la velocidad se puede describir como:

$$v = \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0} \Rightarrow [v] = \frac{[x]}{[t]} \rightarrow \frac{longitud}{tiempo}$$

y la fuerza

$$F = m.a \Rightarrow [a] = [m].[a] \rightarrow masa.\frac{longitud}{tiempo^2}$$

Magnitudes y unidades:

El sistema internacional de unidades, abreviado SI, creado en 1960 por la Conferencia General de Pesas y Medidas homogeniza las unidades utilizadas en distintos países, se utiliza en todos los países a excepción de tres que no lo declararon prioritario: Birmania, Liberia y Estados Unidos.

En la siguiente tabla se puede observar las siete unidades básicas fundamentales:

Cantidad	**Unidad básica**	**Símbolo de la unidad**
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura	Kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

En base a estas magnitudes fundamentales se derivan otras magnitudes, el producto o cociente de dos o más magnitudes fundamentales da como resultado una magnitud derivada que se mide en unidades derivadas, por ejemplo:

Magnitud	**Unidad Básica**	**Símbolo de la Unidad**
Fuerza	Newton	$N = Kg.m/s^2$
Área	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cubico	m^3
Velocidad	metro por segundo	m/s
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2

3 - GUIA DE EJERCICIOS

EJERCICIO 1: Sean los vectores A = (3, 0); B = (0, -3); C = (2, 1); D = (-4, 3) y E = (2, 1). Calcular analítica y gráficamente:

a) A + B
b) A - B
c) 2.A + B
d) 2.C – 3.E
e) C + D + E
f) D – 2.E
g) B + C – D

EJERCICIO 2: Calcular el módulo de los vectores A, B, C, D, E del apartado anterior.

EJERCICIO 3: Indique un vector unitario en la dirección de los vectores A, B, C, D, E.

EJERCICIO 4: Calcular el valor de "k" sabiendo que el módulo del vector (k, 3) = 5

EJERCICIO 5: Sea ABCD un cuadrilátero de vértices A = (-1, -2); B = (4, -1); C = (5,2) y D. Calcular analíticamente y gráficamente las coordenadas de D sabiendo que se trata de un paralelogramo.

EJERCICIO 6: Encuentre la dimensión de "K" de la siguiente fórmula física $K = \frac{m.v^2}{F}$ donde m es la masa, v la velocidad y F es la fuerza.

EJERCICIO 7: Encuentre la dimensión de "S" de la siguiente fórmula física $S = \frac{F.x.}{m.v^2}$ donde F es la fuerza, x la distancia, m es la masa y v la velocidad.

EJERCICIO 8: La velocidad de cierto móvil que se desplaza con un movimiento bidimensional puede determinarse con la siguiente fórmula empírica:

5) $$v = a.t^3 + \frac{b}{t^2 - c}$$

Donde *t* es el tiempo y *a, b* y *c* son constantes. Determine las dimensiones de *a, b* y *c* para que la fórmula sea homogénea dimensionalmente.

EJERCICIO 9: Encuentre la dimensión de G, H e I de la siguiente formula física *F = G.a – H.v – I* donde *F* es la fuerza, *a* la aceleración y *v* la velocidad.

EJERCICIO 10: *Actividad para completar*

Complete la siguiente actividad, cuando el espacio requerido para completar la actividad crea que no es suficiente: consulte el apartado de notación científica.

a) 1km = _____m = _____cm = _____mm

b) 1kg = _____g

c) 1h = _____min = _____s

d) 1A = _____mA = _____uA

e) 1°C = _____°F = _____K

f) $1Km^2$ = _____m^2 = _____cm^2 = _____mm^2

g) $1Km^3$ = _____m^3 = _____cm^3 = _____mm^3

Notación Científica:

Sirve para expresar números muy pequeños o muy grandes utilizando potencias de diez, por ejemplo

$1000000000000000=1.10^{15}$

$0{,}000000000000001=1.10^{-15}$

Un número escrito en notación científica sigue el siguiente patrón:

$$m.10^{x}$$

El número m, se denomina *mantisa,* este número en modulo debe ser mayor o igual a 1 y menor que 10.

El numero X, se denomina orden de magnitud o exponente, el modulo del exponente indica la cantidad de lugares que se deben correr la coma de la mantisa y el signo representa si se corre la coma a la izquierda en el caso de ser negativo o se corre la coma a la derecha cuando el signo es positivo.

Ejercicio 11: *Actividad para completar*

Represente en notación científica los siguientes números

a) – 1000000 =

b) 10000000000000000 =

c) - 0,0000001 =

d) 0,000000000000001 =

e) – 3123456789 =

f) 0,0003123456789 =

Exprese en notación decimal los siguientes números expresados en notación científica:

g) -1.10^{6} =

h) 1.10^{16} =

i) -1.10^{-7} =

j) 1.10^{-15} =

k) $-3,123456789.10^{9}$ =

l) $3,123456789.10^{-4}$ =

Ejercicio 12: *Actividad para completar*

Resuelva las siguientes operaciones, exprese el resultado en notación científica con la unidad de medida correspondiente:

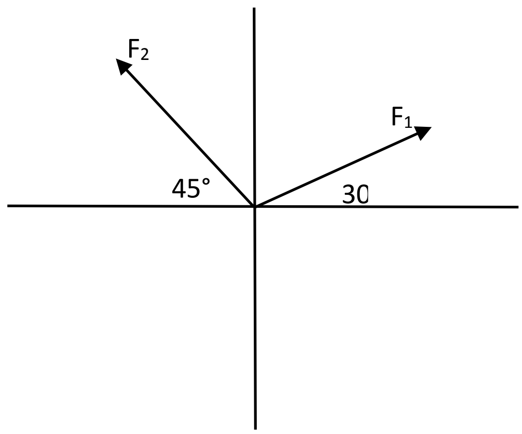
$$E = \frac{8000Kg.9,8\frac{m}{s^2}}{\pi.\left(\frac{25cm}{2}\right)^2} =$$

$$C_x = \frac{\left(-0,150\ Kg.390\ \frac{J}{Kg.K} - 0,200\ Kg.4186\frac{J}{Kg.K}\right).(26,100K - 19K)}{0,085Kg.(26,100K - 100K)} =$$

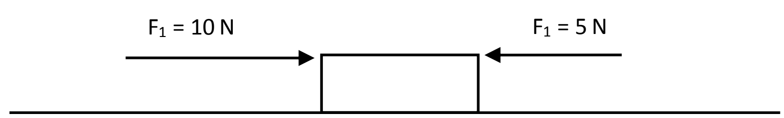
$$Gl = 6,67.10^{-11}.\frac{N.m^2}{Kg^2}.\frac{7,37.10^{22}Kg^2}{(1595000m)^2} =$$

4 – PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) Descomponer analítica y gráficamente según la dirección de los ejes coordenados la fuerzas F1 y F2 del esquema de la figura:



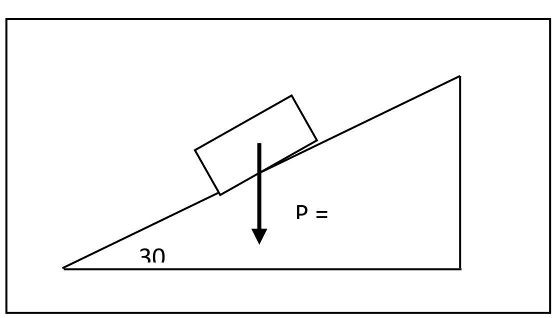
2) Calcular analítica y gráficamente la fuerza resultante sobre el cuerpo M.



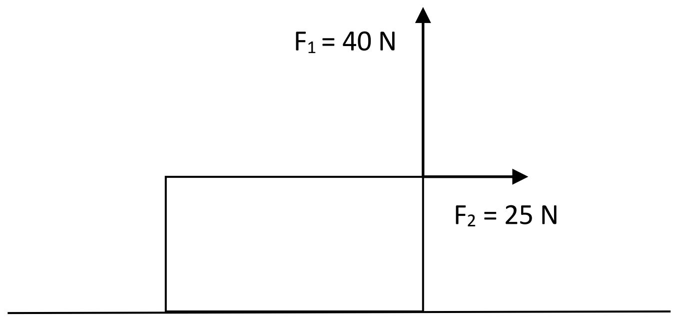
3) Un bote de remos se orienta perpendicularmente a la playa de un río. El remero puede impulsar el bote con una velocidad de 3 m/s con respecto al agua. El río tiene una velocidad de 4 m/s.

a) Elaborar un diagrama en donde se represente las dos velocidades como vectores.
b) Encontrar el vector que representa la velocidad del bote respecto de la orilla.
c) ¿Cuál es el ángulo de dicho vector respecto del bote y cuál el valor de la velocidad del bote?

4) Encontrar analítica y gráficamente las componentes normal y paralela al plano inclinado de la fuerza P del esquema de la figura:



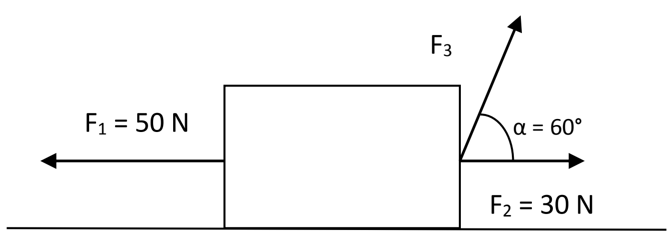
5) Dos personas (un hombre adulto y un niño), tiran por medio de sendas cuerdas de un mismo punto de un bloque, con fuerzas de 40 N y 25 N respectivamente tal como se muestra en la figura:



a) Cuál es el módulo de la fuerza "**R**" que resulta de la composición vectorial de las fuerzas dadas?

b) Qué ángulo forma dicha fuerza resultante con el eje de las "x" (dirección horizontal)?

6) Una persona adulta tira desde la izquierda en la dirección horizontal a un bloque con una fuerza de 50 N. Dos niños tiran desde la derecha al mismo bloque; uno de ellos lo hace con una fuerza de 30 N en la dirección horizontal, mientras que el otro ejerce la fuerza en una dirección que forma un ángulo de 60° con la horizontal. El sistema de fuerzas se muestra en la figura siguiente:



Suponiendo que la línea de acción de todas las fuerzas pase por su centro de gravedad (para descartar efectos de giro), que magnitud debe tener la fuerza F_3 para que el bloque no se mueva en la dirección horizontal?

GUIA DE ESTUDIO N° 3

TEMA: POLINOMIOS

1 – POLINOMIOS. OPERACIONES CON POLINOMIOS

Un polinomio es una expresión matemática constituida por variables, que se representan con letras y constantes. Las variables de la expresión se denominan componente literal y las constantes se denominan componente numérica del polinomio.
EJEMPLO
Sea la expresión $-3x^2y$
La componente numérica es -3
La componente literal es x^2y

POLINOMIOS DE UNA VARIABLE
Los Polinomios de una variable "x" de grado "n" se representan genéricamente con la siguiente expresión:
$P(x) = a_nx^n + a_n\text{-}1x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$

EJEMPLO 1: el polinomio $P_1(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 3$ es un polinomio completo de grado 3, ya que tiene los términos cuadrático $2x^2$, lineal x e independiente 3 no nulos.
El polinomio $P_2(x) = x^3 + x$ es incompleto de grado 3 ya que los términos cuadráticos e independientes son nulos.

Actividad 1: completar el polinomio $x^4 - 3x$ indicando el grado del mismo.

1.1 - SUMA O ADICION DE POLINOMIOS
La suma de polinomios consiste en sumar los términos de igual grado.
EJEMPLO 2: sumar los polinomios P1 (x) y P2 (x) del ejemplo 1 .
$P_1(x) + P_2(x) = (x^3 + 2x^2 + 3x + 3) + (x^3 + x) = (x^3 + x^3) + 2x^2 + (3x + x) + 3$
$P_1(x) + P_2(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4x + 3$

PROPIEDADES DE LA SUMA
Sean los polinomios $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$. Las propiedades de la suma de polinomios son:
6) Asociativa $[P_1(x) + P_2(x)] + P_3(x) = P_1(x) + [P_2(x) + P_3(x)]$
7) Existencia de elemento neutro $P_1(x) + P_{N} = P_1(x)$
   $P_N = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0\}$
8) Existencia de inverso aditivo $P_1(x) + (-P_1(x)) = P_N$
9) Conmutatividad $P_1(x) + P_2(x) = P_2(x) + P_1(x)$

Actividad 2: Sean los polinomios $P(x) = x^3 – 2x +1$ y $Q(x) = x^2 – 3x -5$. Resolver las operaciones $P(x)+Q(x)$; $- P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$. Comparar resultados

1.2 - PRODUCTO DE POLINOMIOS

Antes de estudiar el producto de polinomios conviene repasar algunas operaciones entre expresiones algebraicas:

PRODUCTO DE ESCALAR POR MONOMIO

Sea el escalar "k" y el monomio ax^n, el producto $k.ax^n$ se obtiene de multiplicar el escalar por la componente numérica del monomio:

EJEMPLO 3: multiplicar el monomio 3x2 por el escalar k = -5.
$(-5).\ 3x^2 = -15x^2$

PRODUCTO DE MONOMIOS

Sean los monomios $3x^3$ y $-2x^2$, el producto $(3x^3).(-2x^2)$ se obtiene de multiplicar las componentes numéricas y literal utilizando las propiedades de la multiplicación de potencias de igual base:
$(3x^3).(-2x^2) = -6\ x^{3+2} = -6x^5$

PRODUCTO DE MONOMIO POR POLINOMIO Y POLINOMIO POR POLINOMIO

Se realiza multiplicando los términos aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:
EJEMPLO 4: multiplicar el monomio 2x por el polinomio $(x^2 - 3x + 1)$
$2x.\ (x^2 - 3x + 1) = (2x.x^2) – (2x.3x) +(2x.1) = 2x^3 – 6x^2 + 2x$

EJEMPLO 5: multiplicar los polinomios (x2 –x + 3) . (2x – 1)
Se multiplican los términos del primer polinomio por todos los términos del segundo polinomio:
$(x^2 –x + 3) . (2x – 1) = 2x^3 - x^2 – 2x^2 + x + 6x - 3$

Actividad 3: Analizar el grado del resultado de la multiplicación de polinomios de los ejemplos 4 y 5

Actividad 4: Analice las propiedades del producto de escalar por polinomio y de producto de polinomios.

MULTIPLICACIONES NOTABLES

CONSTANTE POR BINOMIO
$K (a+b) = ka + kb$

BINOMIOS DE LA FORMA
$(x+a).(x+b) = x^2 + ax + bx + a.b = x^2 + (a+b)x + a.b$

PRODUCTO DE BINOMIOS CONJUGADOS
$(a + b).(a - b) = a^2 – b^2$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO
$(a+b)^2 = (a + b).(a+ b) = a^2 + 2ab + b^2$

CUATRINOMIO CUBO PERFECTO
$(a+b)^3 = (a + b). (a + b). (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Actividad 5: Sean los binomios P(x) = (x – 2) y Q(x) = (x + 2). Calcular el producto de P(x) por su conjugado. Determine las potencias 2 y 3 del binomio P(x) y de Q(x). Analice resultados

1.3 - CEROS O RAÍCES DE POLINOMIOS Y DIVISIBILIDAD

Sea el polinomio $P(x) = a_nx^n + a_n\text{-}1x^{n-1} + . . . + a_1x + a_0$. Un cero o raíz de P(x) es un número real “a”, tal que P(a) = 0.

EJEMPLO: El número 2 es raíz del polinomio $P(x) = x^2 – 3x + 2$ ya que $P(2) = 2^2 – 3.2 + 2 = 0$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Todo polinomio de grado n tiene al menos n raíces (reales o no reales).

Vamos a considerar en este curso solamente los polinomios de raíces reales.

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Sea el polinomio $P(x) = a_nx^n + a_n\text{-}1x^{n-1} + . . . + a_1x + a_0$. Si el polinomio P(a) = 0, entonces P(x) es divisible por (x – a).

Ejemplo: El polinomio $P(x) = x^2-3x+2$ es divisible en (x-2) ya que $P(2) = 2^2 -3.2 +2 = 0$

Actividad 6: Probar si el polinomio P(x) es divisible en (x – 1)

1.4 – DIVISIÓN DE POLINOMIOS

REGLA DE RUFFINI

Permite realizar divisiones de polinomios del tipo $P(x) = a_nx^n + a_n\text{-}1x^{n-1} + . . . + a_1x + a_0$ por binomios de la forma (x – a) ó (x + a).

EJEMPLO: dividir el polinomio P(x) = x^2-3x+2 en (x-2).

Se realiza el siguiente algoritmo:

	1	-3	2
2 (*)		2	-2
	1	***-1***	**0**

(*) Este valor corresponde al 2 de la expresión (x-**2**) del divisor cambiado de signo.
Los números de la primera fila corresponden a los coeficientes del polinomio P(x) completo y ordenado. P(x) = **1**x^2**-3**x+**2**,
Los coeficientes de la segunda fila 2 y -2 se obtienen de multiplicar los elementos de la tercera fila por 2 (*).
Los coeficientes de la tercera fila se obtienen de la suma algebraica de los elementos de la primera con la segunda fila.
El último número de la tercera fila (0) corresponde al resto de la división.
Los restantes números de la tercera fila 1 y -1 corresponden a los coeficientes del polinomio cociente entre P(x) = x^2-3x+2 y x-2. Por tratarse de una división de un polinomio de grado 2 en uno de grado 1 el cociente es de grado 1 que en este caso sería **1**.x – **1**.
Resumiendo: (x^2-3x+2) / (x-2) = x - 1

EJEMPLO 2: dividir x^4 – 16 en x -2
Se trata de una división de un polinomio de grado cuatro x^4 – 16 en uno de grado uno x -2.

El polinomio dividendo completo y ordenado es:
$x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 16$

por lo tanto el cuadro queda de la siguiente manera:

	1	0	0	0	-16
2		2	4	8	16
	1	***2***	***4***	***8***	**0**

El cociente es de grado tres $\mathbf{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$
El resto de la división es **0**
(x^4 – 16) : (x – 2) = $\mathbf{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$

Actividad 7: Indique si el polinomio P(x) = $x^4 - 3x^3 + 2x + 4$ es divisible en (x – 2). Determine el cociente aplicando la Regla de Ruffini.

2 - FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorear o factorizar un polinomio P(x) de grado "n" significa descomponerlo o expresarlo como el producto de polinomios de menor grado:

$P(x) = a_n x^n + a_n\text{-}1x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x\text{-}a_1).(x\text{-}a_2)\ldots\ldots(x.a_n)$

Donde $a_1, a_2, \ldots . a_n$ son los ceros o raíces del polinomio P(x).

EJEMPLO: El polinomio $P(x) = x^2\text{-}3x\text{+}2$ se puede factorear de la siguiente manera:

$P(x) = x^2\text{-}3x\text{+}2 = (x – 2).(x – 1)$ siendo los números reales 1 y 2 raíces o ceros de P(x) ya que P(1) = 0 y P(2) = 0.

CASOS DE FACTOREO

Se presentan a continuación los casos de factorización de polinomios:

2.1 - PRIMER CASO: FACTOR COMÚN

Consiste en extraer los factores comunes numéricos y literales de una expresión. Se deben extraer aquellos factores que se repiten en todos los términos con su menor exponente:

EJEMPLO: Factorear el polinomio $3x^3 – 9\,x^2 + 15x$.

Si descomponemos los coeficientes en sus factores primos quedaría de la siguiente forma:

$3x^3 – 3^2\,x^2 + 3.5.x$

Los factores que se repiten con su menor exponente son 3 y x, de modo que factorizado el polinomio queda de la siguiente manera:

$3x^3 – 9\,x^2 + 15x$ = **$3x.(\,x^2 – 3x +5)$**

2.2 - SEGUNDO CASO: FACTOR COMÚN POR GRUPOS

Sea el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$. Se puede observar a primera instancia que el polinomio no tiene factores comunes. Se deben analizar otros casos de factoreo. Se aplica el segundo caso que consiste primeramente en determinar dos grupos de igual cantidad de términos y a cada uno de ellos se le extraen los factores comunes:

$P(x) = (x^3 + 2x^2\,)+ (4x + 8)$

Al extraer factor común se obtiene:

$P(x) = x^2.(x + 2\,) + 4.(x + 2)$

Se observa que en cada uno de los términos el factor (x + 2) se repite y por lo tanto se puede extraer factor común nuevamente y se obtiene el polinomio P(x) expresado como el producto de un polinomio de grado 1 y uno de grado 2.

$P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8 =$ **$(x + 2\,).(x^2 + 4)$**

2.3 - TERCER CASO: TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

En este caso el trinomio está formado por dos términos que son cuadrados perfectos mientras que el tercer término es igual al doble del producto de las raíces cuadradas de cada uno de los cuadrados perfectos.

EJEMPLO:

Factorizar el polinomio $P(x) = x^2 – 6x + 3$

El polinomio no tiene factores comunes y al tener tres términos no es aplicable el segundo caso de factoreo.

Se observa claramente que el polinomio tiene dos cuadrados perfectos x^2 y 9 cuyas raíces cuadradas son x y 3 respectivamente.

El duplo del producto de las raíces cuadradas es $2.x.3 = 6x$

El signo negativo del doble producto significa que uno de los términos del polinomio factorizado es negativo. El polinomio T(x) se escribe factorizado de la siguiente forma:

$P(x) = x^2 – 6x + 3 = (x – 3)^2$

2.4 - CUARTO CASO: CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

Factorizar el polinomio $P(x) = x^3 - 15x^2 + 75x – 125$

No es posible en este polinomio aplicar los casos de factor común ni de factor común por grupos. Se analiza por trinomio cuadrado perfecto al tener el mismo dos cubos perfectos que son x^3 y 125. Si se observa el segundo término este es igual al triple del cuadrado de x multiplicado por 5, mientras que el término 75x es igual al triple del cuadrado de 5 por x. Entonces el polinomio $P(x) = x^3 - 15x^2 + 75x – 125$ se puede escribir de la siguiente manera:

$P(x) = x^3 - 15x^2 + 75x – 125 =$ $\mathbf{(x – 5)^3}$

Al ser el término independiente negativo y al elevarlo a potencias impares se obtienen resultados negativos, por esa razón en el cuatrinomio aparecen dos términos negativos que son $-15x^2$ y -125.

2.5 - QUINTO CASO: DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS

En este caso se trata de la diferencia de dos cuadrados perfectos cuyos factores son dos polinomios conjugados como se muestra en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO:

Factorizar el polinomio $x^4 – 4$.

Se observa que se trata de dos cuadrados perfectos x^4 y 4 cuyas raíces cuadradas son x^2 y 2 respectivamente, que son los términos de los binomios conjugados en que se descompone el polinomio $x^4 – 4$. El polinomio factorizado se escribe de la siguiente manera:

$P(x) = x^4 – 4 =$ $\mathbf{(x^2 + 2). (x^2 - 2)}$

2.6 - SECTO CASO: POLINOMIOS DE LA FORMA $x^n + a^n$ ó $x^n - a^n$

Se presentan en este tipo de factorización tres situaciones posibles:

a) Exponente impar signo negativo. Ejemplo $x^5 - 32$
   Este polinomio es equivalente $x^5 - 2^5$, que tiene como cero al número 2 por lo tanto es divisible en (x-2). Realizando la división:
   $(x^5 - 2^5).\ (x-2)$
   Se obtiene:
   $(x^5 - 2^5).\ (x - 2) = x^4 + 2x^3 + 2^2x^2 + 2^3x + 2^4$
   Entonces se puede expresar el polinomio $x^5 - 2^5$ factorizado:
   $x^5 - 2^5 = (x - 2).(x^4 + 2x^3 + 2^2x^2 + 2^3x + 2^4)$

b) Exponente impar signo positivo. Ejemplo $x^5 + 32$
   Este polinomio es equivalente $x^5 + 2^5$, que tiene como cero al número -2, por lo tanto es divisible en (x + 2). Realizando la división:
   $(x^5 + 2^5).\ (x + 2)$
   Se obtiene:
   $(x^5 + 2^5).\ (x + 2) = x^4 - 2x^3 + 2^2x^2 - 2^3x + 2^4$
   Entonces se puede expresar el polinomio $x^5 - 2^5$ factorizado:
   $x^5 - 2^5 = (x - 2).(x^4 - 2x^3 + 2^2x^2 - 2^3x + 2^4)$

c) Exponente par signo positivo. Ejemplo $x^4 + 16$
   En este caso no se puede factorear por que no tiene raíces reales.

Actividad 8: Verificar la factorización de cada uno de los ejemplos anteriores realizando los productos de los polinomios en que se descompone el polinomio P(x).

2.7 - OTRA FORMA DE FACTORIZAR UN POLINOMIO (CONOCIENDO SUS RAÍCES)

Todo polinomio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ de grado n que tenga n raíces reales $r_1, r_2, \ldots, r_n$ puede expresarse de la forma:

$P(x) = a_n.(x-r_1).\ (x-r_2).\ (x-r_3) \ldots . (x-r_n)$ (1)

a_n es el coeficiente del término de mayor grado

EJEMPLO: Factorizar el polinomio $P(x) = 3x^2 - 21x + 18$

Como el polinomio es de segundo grado se pueden calcular sus raíces utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{21 +/- \sqrt{21^2 - 4.3.18}}{2.3} = \frac{21 +/- \sqrt{225}}{6} = \frac{21 +/- 15}{6}$$

Las raíces del polinomio son:

x = 6 y x = 1

Por lo tanto el polinomio se puede expresar factorizado de la siguiente forma:

$P(x) = a_2.(x - r_1). (x - r_2)$

$P(x) = 3 (x – 6).(x – 1)$

3 - DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Se presentan aquí algunas consideraciones importantes para el concepto de divisibilidad de polinomios.

TEOREMA DEL RESTO: el resto “r” de dividir un polinomio P(x) en (x-a) es igual a P(a).

r = P(a)

De este teorema se puede deducir que un polinomio cualesquiera P(x) es divisible por un binomio de la forma (x –a) si y solo sí P(a) = 0.

EJEMPLO: Indique si el polinomio $P(x) = x^2 + 6x + 9$ es divisible en (x-3) y (x+3).

Primeramente verificamos el resto de la división de $P(x) = x^2 + 6x + 9$ en (x-3)

$P(3) = 3^2 + 6.3 + 9 = 9 + 18 + 9 = 36$

P(x) no es divisible en (x-3) por que el resto de la división es igual a 36 de acuerdo a la aplicación del teorema del resto.

Se verifica el resto de la división de $P(x) = x^2 + 6x + 9$ en (x+3)

$P(-3) = (-3)^2 + 6.(-3) + 9 = 9 – 18 + 9 = 0$

P(-3) = 0

Como el resto de la división $P(x) = x^2 + 6x + 9$ en (x+3) es igual a cero, el polinomio P(x) es divisible en (x+3).

Si realizamos la división por cualquier método obtenemos:

$(x^2 + 6x + 9) : (x+3) = x+3$ (1)

Si P(x) : Q(x) = R(x) transponiendo términos se puede expresar P(x) = Q(x) . R(x). Por lo tanto la expresión (1) se puede escribir:

$(x^2 + 6x + 9) = (x+3).(x+3)$

EJEMPLO 2: Aplicando las propiedades de la divisibilidad de polinomios, factorizar el polinomio x^3+5x^2+6x.

1) Al ser nulo el término independiente $a_0 = 0$, indica que el polinomio es divisible por x. Por lo tanto se puede extraer x como factor común:
   x.(**$x^2 + 5x + 6$**)

2) La expresión entre paréntesis representa un polinomio de segundo grado cuyos ceros o raíces se pueden obtener a través de la fórmula general de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-5 +/- \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{-5 +/- \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 +/- \sqrt{1}}{2}$$

Se obtienen las soluciones

$x = -3$

$x = -2$

Lo que significa que $x = -3$ y $x = -2$ son raíces del polinomio de segundo grado $\mathbf{x^2 + 5x + 6}$ y por lo tanto este polinomio es divisible en $x+3$ y $x+2$.

De acuerdo a (1) se puede expresar el polinomio $\mathbf{x^2 + 5x + 6}$ de la siguiente manera:

$x^2 + 5x + 6 = a_2(x+3).(x+2)$

Como $a_2 = 1$

$x^2 + 5x + 6 = (x+3).(x+2)$

De esta manera el polinomio x^3+5x^2+6x queda expresado de la siguiente manera: $x^3+5x^2+6x = x.(x+3).(x+2)$

4 - GUIA DE EJERCICIOS

EJERCICIO 1: Completar, ordenar y clasificar las siguientes expresiones algebraicas indicando el grado de cada una de ellas:

a) $P(x) = x^5 – 1$
b) $Q(x) = 3x^3 – x + 1$
c) $R(x) = -3x^7 – x^5 – 1$
d) $T(x) = 1/2x^7 – 5x^2 + x – 3/4$

EJERCICIO 2: Con las expresiones del apartado 1, realice las siguientes operaciones indicando el grado del polinomio resultante:

a) $P(x) + R(x)$
b) $P(x) - R(x)$
c) $R(x) - P(x)$
d) $[P(x) + R(x)] – T(x)$
e) $2.P(x) – 3.Q(x)$
f) $-1/2.P(x) + 4/3.R(x)$

EJERCICIO 3: Resolver los siguientes productos indicando el grado de la expresión resultante:

a) $(-3/4x^5).(-1/2x)$
b) $[(-1/4x^7).(-1/2x^4)].(3x^5)$
c) $7/4x^3.(-1/9x^4).(5x)$
d) $(-3).(x^5 – 1)$
e) $x. (x^5 – 1)$
f) $(-1/2x).(3x^3 – x + 1)$
g) $(x+1).(x^4-1)$
h) $(x-2).(x^2 + 2x -1)$
i) $(x+2).(x-2).(x+1)$
j) $(x-2).(x+2).(x+1),(x-3)$

EJERCICIO 4: Resolver los siguientes productos, indicando el grado de la expresión resultante:

a) $(x + a). (x - a)$
b) $(x + a). (x + a)$
c) $(x - a). (x - a)$
d) $(x + a). (x + a). (x + a)$
e) $(x - a). (x - a). (x - a)$

EJERCICIO 5: Resolver las siguientes potencias de binomios

a) $(x + a)^2$
b) $(x - a)^2$
c) $(x + a)^3$
d) $(x + a)^3$
e) $(2x + 9)^2$
f) $(-x + 3)^2$
g) $(2x + 9)^3$
h) $(-x + 3)^3$
i) $(x^2 – 1)^2$
j) $(x^2 – 2x)^2$
k) $(1/2x^2 – x)^2$
l) $(1/2x^2 – x)^3$

EJERCICIO 6: Dividir monomios

a) $(-3/4x^7):(1/2x^2)$
b) $(1/3x^5):(-1/2x^4)$
c) $(-2/9x^7):(- x^7)$
d) $[(-x^5):(-3.x^2)]$

EJERCICIO 7: Indique, utilizando el Teorema del Resto, si los siguientes polinomios son divisibles por (x+1); por (x-1); (x-2) o (x + 2)

a) $P(x) = x^2 – 3x + 2$
b) $P(x) = x^2 – 1$
c) $P(x) = x^2 – x – 2$
d) $P(x) = x^2 + 1$
e) $P(x) = x^5 – 1$
f) $P(x) = x^5 + 1$
g) $P(x) = x^2 – 4$
h) $P(x) = x^2 + 4$
i) $P(x) = x^5 – 32$
j) $P(x) = x^5 + 32$

EJERCICIO 8: Realizar las siguientes divisiones utilizando la Regla de Ruffini:

a) $(x^5 – 1) : (x – 1)$
b) $(x^2 – 3x + 2) : (x – 1)$
c) $(x^2 – 3x + 2) : (x - 2)$
d) $(x^4 – 16) : (x – 2)$

e) $(x^4 – 16) : (x + 2)$
f) $(x^5 – 32) : (x + 2)$
g) $(x^5 + 32) : (x - 2)$

EJERCICIO 9: En función de los resultados del ejercicio anterior; escribir, si es posible, el dividendo como el producto de polinomios de menor grado.

EJERCICIO 10: Construir un polinomio P(x) cuyos ceros o raíces son 1 y -1, y P(0) = 5

EJERCICIO 11: Construir un polinomio P(x) cuyos ceros o raíces sean 1, -1 y 2 y P(-2) = 10

EJERCICIO 12: Construir un polinomio P(x) de raíz 2 cuya multiplicidad sea 3 y P(0) = 1

EJERCICIO 13: Indique el valor de "a" para que el polinomio $ax^2 + 3x -5$ sea divisible por (x - 2)

EJERCICIO 14: Indique el valor de "a" para que el polinomio x^2 - a sea divisible por (x - 2) y por (x+2)

EJERCICIO 15: Indique el valor de los coeficientes "a" y "b" para que el polinomio $ax^2 + bx + 5$ sea divisible por (x – 2) y (x + 3).

EJERCICIO 16: Factorizar los siguientes polinomios:
a) $2x^2 - 8x$
b) $3x^4 - 15x^3 + 9x$
c) $15x^3 – 12x^2 + 6x$
d) $3x^7 – 12x^5$
e) $x^3 – 4x^2 + x - 4$
f) $5x^5 – x^4 – 5x – 1$
g) $3x^3 – 9x^2 + x - 3$
h) $x^2 -2x + 1$
i) $x^2 -6x + 9$
j) $x^2 +6x + 9$
k) $9x^2 +12x + 4$
l) $x^3+6x^2+12x+8$
m) $x^2 -4$
n) $x^2 -49$
o) $9x^2 - 25$
p) $16x^2 - 9$
q) $x^4 -1$
r) $x^8 – 264$

s) $x^4 – 16$
t) $x^4 + 16$
u) $x^5 - 32$
v) $x^5 + 32$
w) $x^5 – x$
x) $4x^2-36$
y) $x^3 -6x^2 + 9x$
z) $x^3 – 8$

EJERCICIO 17: Factorizar los siguientes polinomios de segundo grado.

a) $x^2 -6x + 9$
b) $x^2 -6x + 8$
c) $x^2 +6x + 8$
d) $x^2 +2x - 15$
e) $4x^2 -26x -14$
f) $6x^2 -12x + 6$
g) $x^2 +7x – 18$
h) $x^2 – 1$

EJERCICIO 18: Determina el valor de “m” tales que el polinomio

$P(x) = (m-3).x^3 – x^2 + (m^2+10).x + 8m + ¼$ sea divisible por $(x+2)$

EJERCICIO 19: Determina el valor de “m” tal que el polinomio $P(x) = 3x^2 + m.x +(m+1)$ sea divisible por $x+5$.

EJERCICIO 20: escribe un polinomio de grado 3 que tenga como raíces a -1, -2, y 3 y $P(0)=1$

EJERCICIO 21: Escribe el polinomio de grado 4 que sea divisible por $(x+1)$, $(x-1)$, tenga como raíces a 2 y 5 y $P(-1) = 8$

EJERCICIO 22: Sea el polinomio $x^5 -32$. Determine la raíz o raíces del polinomio, divisores y expresarlo factoreado.

EJERCICIO 23: Sea el polinomio $x^5 +32$. Determine la raíz o raíces del polinomio, divisores y expresarlo factoreado.

EJERCICIO 24: Sea el polinomio $2x^2 + 6x - 6$. Encuentre sus raíces, indique sus divisores y expresarlo factoreado.

EJERCICIO 25: Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

$\frac{x^4-16}{x-2}$ b) $\frac{x^2-4}{x+2}$ c) $\frac{x^2-4x+3}{x-1}$ d) $\frac{x^4-81x}{x-3}$

5 - PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) Sea la ecuación de la posición en función del tiempo $x(t) = x_0 + v_0t + ½\ a.t^2$ que corresponde al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de un móvil. Siendo $x_0 = 1000$ [m] la posición inicial de un móvil respecto a un sistema de referencia, $v_0 = 50$ [m/s) y una aceleración constante a=2 [m/s^2]. Determinar:
   a) La ecuación numérica que representa la posición del móvil en función del tiempo.
   b) Las variables que intervienen en la ecuación.
   c) Grado del polinomio
   d) Posición del móvil transcurridos un tiempo t de 10 segundos.

2) Al provocar una voladura en una cantera de áridos, la energía liberada proyectó los fragmentos de roca de manera que, en término medio, describieron una trayectoria parabólica dada por la siguiente función:

$$h = -t^2 + 12 \cdot t$$

En donde:

h : Altura alcanzada en cualquier instante, en m (metros).

t : Tiempo transcurrido, en s (segundos).

Determinar:
   a) ¿Qué altura media alcanzaron los fragmentos a los 2 s ?
   b) ¿Cuánto tiempo tardan los fragmentos en llegar al suelo ?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA

GUIA DE ESTUDIO N° 4

TEMA: FUNCIÓN LINEAL. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1 – FUNCION LINEAL

Una función lineal o polinómica de grado uno es una función de la forma $f(x) = a.x + b$, cuya representación gráfica corresponde a una línea recta.
El coeficiente "a" de la función se denomina pendiente de la recta y el coeficiente "b" se denomina ordenada del origen.

EJEMPLO:
Representar gráficamente la función lineal $y = 3/2.x - 4$.
Se determina la ordenada del origen:
Si $x = 0$: $y = -4$
La ordenada del origen $b = -4$
La pendiente de la recta es $a = 3/2$.
Esta recta se la puede observar en Figura 1.

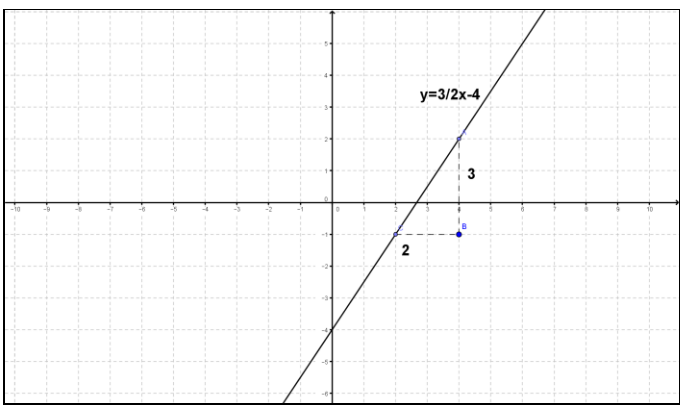


Figura 1: Recta de ecuación $y = 3/2x - 4$

Actividad 1: determinar la pendiente y la ordenada del origen de la recta cuya ecuación es $2x–y =1$

1.1 - FUNCION LINEAL. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

En el estudio del Movimiento Rectilíneo Uniforme se utiliza como modelo matemático la función lineal o ecuación de la recta. En este caso se utiliza en el eje de las ordenadas la variable espacio o desplazamiento que se representa con la letra **x** y en el eje de las abscisas la variable tiempo que se representa con la letra **t**.
El origen del sistema de coordenadas es aleatorio, es decir que lo puedo elegir de acuerdo a mi conveniencia.
Por ejemplo para un móvil que se desplaza con MRU la representación gráfica sería de la siguiente forma:

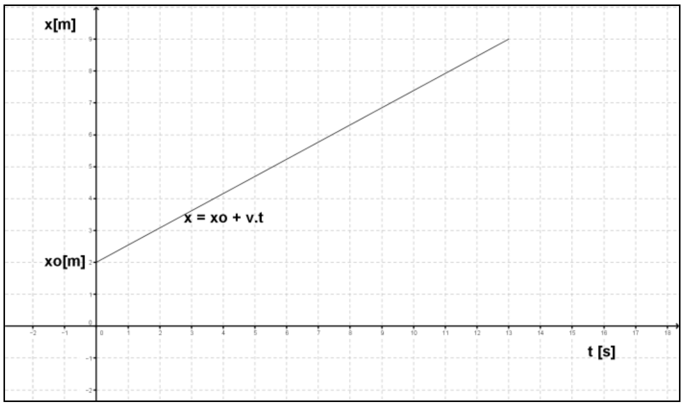


Figura 2: Representación gráfica x = f(t) en M.R.U.

Las variables que intervienen en el MRU son las siguientes:
Espacio recorrido : x (m) (Eje de ordenadas)
Instante : t (s) (Eje de Abscisas)
La velocidad es constante y está representada por la pendiente de la recta

$$v[m/s] = \frac{\Delta x[m]}{\Delta t[s]}$$

La posición inicial respecto al sistema de coordenadas adoptado es x_o [m] (Ordenada del origen)

ANALOGIA CON LA ECUACION DE LA RECTA

FUNCION LINEAL	ECUACION DE LA RECTA	MRU
f(x) = a x + b	y = a.x + b	x [m] = v.[m/s].t[s] + xo[m]
Pendiente	a = Δy/ Δx	v = Δx/ Δt
Variable Dependiente	y	x [m] Posición del móvil
Variable Independiente	x	t [s] Instante de tiempo
Ordenada del origen	b	x_o [m] Posición Inicial

EJEMPLO: Un móvil se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniforme. En la siguiente tabla se expresan los valores de espacio recorrido (x) en metros en el instante (t) en segundos:

t (s)	x (m)
2	50
4	100
6	150

8	200
12	300

a) Representar en un sistema de coordenadas (x, t) el movimiento del vehículo.
b) Calcule la velocidad del mismo. (Recordar que la velocidad en MRU es la pendiente de la recta)
c) Indique la posición del móvil a los 25 segundos.

RESOLUCION

a) Los valores indicados deben representarse en un sistema coordenado x[m]-t[s]. Ubicando los puntos y trazando la línea recta que une los mismos. Por tratarse de M.R.U. los puntos estarán alineados.

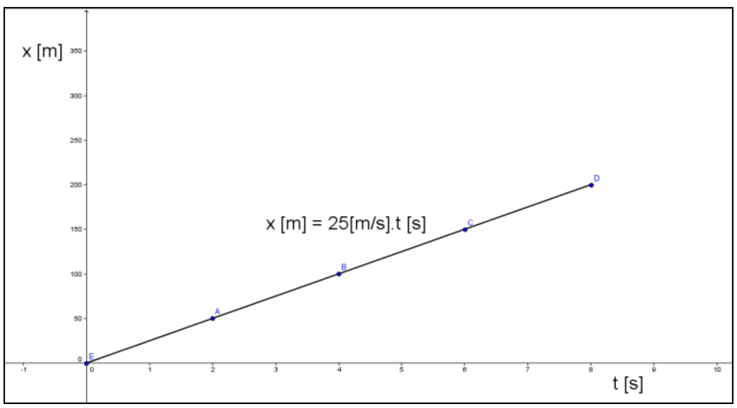


Figura 3: Represntación gráfica x = f(t) de MRU con posición inicial nula

b) Para calcular la velocidad debo calcular la pendiente de la recta que se obtiene del apartado “a”. Analíticamente debo calcular la variación del espacio recorrido x [m]respecto del tiempo empleado t [s] para recorrer esa distancia. Se pueden tomar las variaciones de dos puntos cualesquiera. En este caso se tomaron los puntos correspondientes a x = 100 m y x = 50 m.

$$v[m/s] = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100[m] - 50[m]}{4[s] - 2[2]} = \frac{50[m]}{2[s]} = 25[m/s]$$

La ecuación del movimiento sería en este caso:

$$x[m] = v[m/s].t[s] + x_o[m]$$

$$x[m] = 25[m/s].t[s] \qquad (1)$$

Obsérvese que xo = 0 es la posición del móvil en el instante t = 0 seg.

c) La posición del móvil a los 25 segundos se calcula utilizando la ecuación (1). Sustituyendo t en la ecuación se obtiene:

$$x[m] = 25[m/s].25[s] = 625[m]$$

En un tiempo de 25 segundos habrá recorrido 625 metros.

EJEMPLO: Un móvil se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniforme. En la siguiente tabla se expresan los valores de espacio recorrido (x) en metros en el instante (t) en segundos:

t (s)	**x (m)**
0	50
2	80
4	110
6	140
10	200

a) Representar en un sistema de coordenadas (x, t) el movimiento del vehículo.
b) Calcule la velocidad del mismo. (Recordar que la velocidad en MRU es la pendiente de la recta)
c) Indique la posición del móvil a los 25 segundos.

RESOLUCION

a) Los valores indicados deben representarse en un sistema coordenado x[m]-t[s]. En este caso la posición inicial no coincide con el origen del sistema de coordenadas. La posición inicial que corresponde a t = 0 seg es x_o = 50 m. Representando los pares ordenados (t,x) en un sistema de coordenadas se obtiene la línea recta que representa el Movimiento:

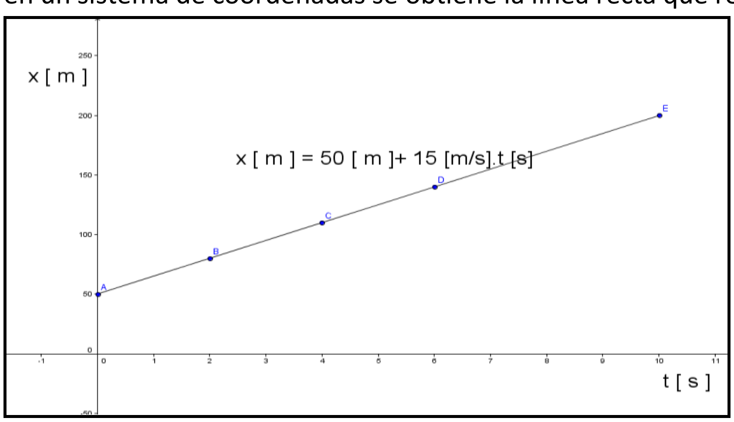


Figura 4: Represntación gráfica x = f(t) de MRU con posición inicial no nula

b) Calculo de la velocidad: se calcula como la variación de espacio respecto tiempo:

$$v[m/s] = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{80[m] - 50[m]}{2[s]} = \frac{30[m]}{2[s]} = 15[m/s]$$

La ecuación que representa el movimiento es:

$$x[m] = v[m/s].t[s] + x_o[m]$$

$$x[m] = 15[m/s].t[s] + 50[m]$$

c) La posición del móvil a los 25 segundos es:

$$x[m] = 15[m/s].25[s] + 50[m] = 425[m]$$

Actividad 2: representar en un gráfico la posición de un móvil x expresado en metros x[m] en función de tiempo t expresado en segundos t[s] cuya velocidad es 4 [m/s] y su posición inicial está ubicada a 10 m del origen del sistema de coordenadas. El móvil se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme.

Actividad 3: Indicar en la función de la actividad anterior, las variables, la ordenada del origen y la pendiente de la recta que representa la función x = f (t)

2 - ECUACIONES DE PRIMER GRADO

2.1 - ECUACION DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita son de la forma ax + b = 0. La resolución consiste en determinar el valor de “x” que verifica dicha igualdad.

EJEMPLO

Resolver la ecuación de primer grado 3x + 5 = -1/3.x + 10

Primeramente se deben agrupar los términos lineales y los términos independientes:

3x + 1/3.x + 5 – 10 = 0

Resolviendo y realizando las transposiciones correspondientes se obtiene “x”:

10/3.x -5 = 0

x = 5.3 / 10

x = 3/2

Actividad 4: Resolver la ecuación de primer grado – 3t + 5 = 1/2t + 3/4

2.2 - ECUACION DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas tienen el formato A.x + By + C = 0. Este tipo de ecuaciones tienen infinitas soluciones, que son pares ordenados (x, y) que verifican la misma. Estos se obtienen de despejar una variable "x" o "y", en función de la otra variable, asignar valores y determinar los pares ordenados.

EJEMPLO

Resolver la ecuación de primer grado con dos incógnitas 6.x – 3y = 9.

Despejando "y" de la ecuación:

y = 3x – 3

Se asignan valores a "x" y se calculan los correspondientes valores de "y" y se tabulan:

Si x = 0; y = -3

Si x = 1; y = 0

Y así sucesivamente. Los valores se tabulan como se observa en la tabla siguiente:

x	y
0,00	-3,00
1,00	0,00
2,00	3,00
3,00	6,00
4,00	9,00
-1,00	-6,00
-2,00	-9,00
-3,00	-12,00

Los pares ordenados que verifican la ecuación son (0,-3); (1,0); (2, 3); (3,6)…y así sucesivamente. Estos pares se los pueden representar en una línea recta como se observa en la figura siguiente:

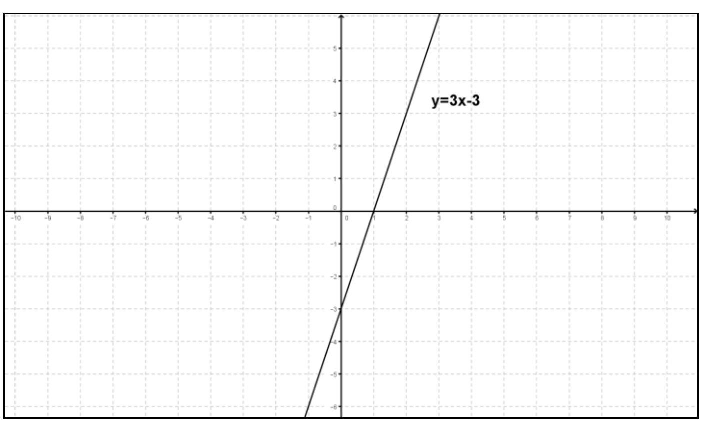


Figura 5: Representación gráfica de ecuación 6x -3y =9

Actividad 5: Resolver la ecuación de primer grado con dos incógnitas -4x + 2y = 2. Graficar.

3 - SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en dos ecuaciones de la forma

Ax + By + C = 0

Dx + Ey + F = 0

Resolver un sistema consiste en determiner los pares ordenados (x, y) que verifican ambas ecuaciones simultáneamente. Como la gráfica de cada una de las ecuaciones consiste en una línea recta se pueden presentar tres posibilidades:

a) Sistemas Compatibles Determinados: las rectas que representan cada una de las ecuaciones se interceptan en un solo punto (x,y) que verifica ambas ecuaciones.

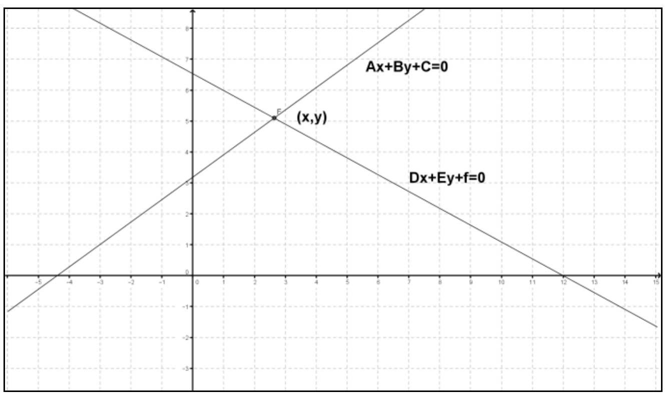


Figura 6: Sistema Compatible Determinado

b) Sistemas Compatibles Indeterminados: las rectas que representan cada una de las ecuaciones son coincidentes. Infinitos pares ordenados (x, y) verifican ambas ecuaciones simultáneamente. El sistema tiene infinitas soluciones.

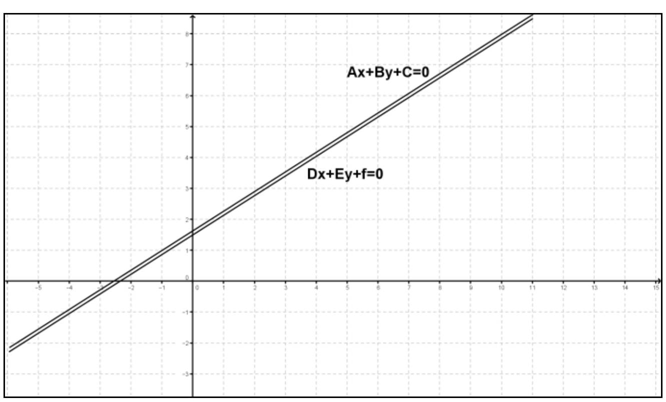


Figura 7: Sistema Compatible Indeterminado

c) Sistemas Incompatibles: las rectas que representan cada una de las ecuaciones son paralelas. El sistema no tiene solución ya que ningún par ordenado verifica ambas ecuaciones simultáneamente:

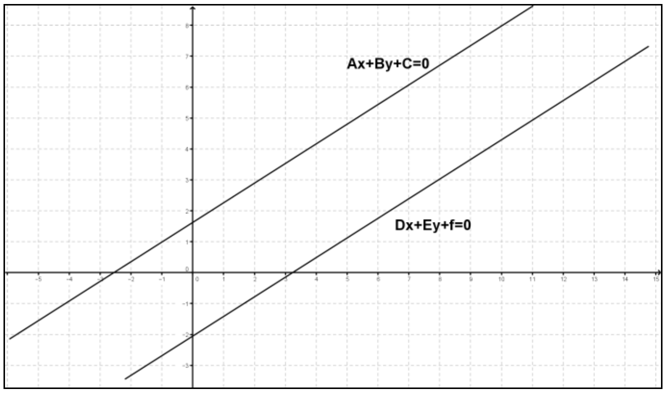


Figura 8: Sistema Incompatible.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

Existen diferentes métodos analíticos que permiten resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas como ser los Métodos de Sustitución, de Igualación, de Reducción o Método de Determinantes. Se desarrollará un ejercicio completo por el Método de Sustitución y como actividad se resolverán otros ejemplos por otros métodos.

EJEMPLO

Resolver por el Método de Sustitución el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$$

Se resuelve aplicando los siguientes pasos:

1) Se despeja una variable de una de las ecuaciones (en este caso “x” de la segunda ecuación):
   x = 14 – 2y
2) Se sustituye esta variable despejada en la ecuación de la cual no la hemos despejado (la primera ecuación en este ejemplo)
   3.(14-2y) – 2y =2
   42 – 6y -2y -2 = 0
3) Se resuelve la ecuación resultante con una incógnita (en este caso la variable “y”)
   -8y + 40 = 0
   y = 40/8
   y = 5
   Ya tenemos el valor de una de las variables
4) Se calcula la variable restante:
   x = 14 – 2.y = 14 – 2.5 = 4
   x = 4
5) El par (x, y) = (4, 5) es la solución única del sistema de ecuaciones.

Actividad 7: Resolver analíticamente por método de determinantes y graficar las rectas correspondientes al sistema del ejemplo anterior

EJEMPLO:
Resolver analíticamente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -8x + 4y = -8 \end{cases}$$

Se aplica el método de sustitución despejando la variable "y" de primera ecuación:

1) Se despeja "y" de la primera ecuación
   y = -2 + 2x
2) Se sustituye en segunda ecuación
   -8x + 4(-2 + 2x) = -8
3) Se resuelve la ecuación con una incógnita (x)
   -8x -8 +8x + 8 = 0
   0x = 0

Esta ecuación se verifica para cualquier valor de la variable "x", lo que significa que el sistema es compatible indeterminado, es decir que tiene infinitas soluciones que se pueden expresar de la siguiente manera:
y = 2x - 2
Algunos pares ordenados que verifican la ecuación son por ejemplo (0, -2); (1, 0); (2, 2); (6, 4)
En general estos pares tienen la forma (t, 2t-2)

Actividad 8: Representar gráficamente cada una de las ecuaciones del sistema del ejemplo anterior. Extraer conclusiones.

Actividad 9: resolver utilizando un método a elección el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Representar gráficamente cada una de las ecuaciones y extraer conclusiones:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -8x + 4y = -8 \end{cases}$$

4 - GUIA DE EJERCICIOS

EJERCICIO N° 1: Encontrar pendiente y ordenada del origen de las rectas cuyas ecuaciones implícitas son las siguientes:

a) $2x - y + 1 = 0$
b) $-6x + 2y + 4 = 0$
c) $-3x + 2y - 4 = 0$
d) $x + 2y = 0$

EJERCICIO N° 2: indique la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1, 1) y tiene pendiente a=-2

EJERCICIO N° 3: indique la ecuación de la recta paralela a $2x + y +1 = 0$ que pase por el origen.

EJERCICIO N° 4: indique la ecuación de la recta paralela a $-6x + 2y + 4 = 0$ que pase por el punto (0, -2)

EJERCICIO N° 5: indique la intersección de las rectas $2x - y + 1 = 0$ y $-6x + 2y + 4 = 0$.

EJERICIO N° 6: Representar gráficamente las siguientes funciones lineales. Indique asimismo dominio e imagen de las mismas.

a) $y = x$
b) $y = -1/2.x$
c) $y = -1/2.x + 2$
d) $y = -2.x + 2$
e) $y = -2.x - 2$
f) $y = 4$

EJERCICIO 7: Graficar, indicando pendiente y ordenada del origen las siguientes rectas expresadas en forma implícita:

a) $x + y = 0$
b) $-x + y = 0$
c) $-2x + y = 1$
d) $2x + 3 y = -3$
e) $-1/2x + 4y = -1$

EJERCICIO 8: Indique cuál de los siguientes pares ordenados o puntos pertenecen a la recta de ecuación $y=3x - 1$.

A = (1, 0); B = (1, 2); C = (-1, -4) D = (-1, 0) E = (0, -1)

EJERCICIO 9: Representar gráficamente las siguientes funciones. Indique dominio y codominio de las mismas.

a) $y = 2x - 1$

b) $y = 2^x$
c) $y = (1/2)^x$
d) y = log x
e) $y = e^x$
f) y = 1/x
g) y = 1/x-1

EJERCICIO 10: Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado con una incógnita:

a) 2x – 5 = 0
b) ½.x + 1 = -1
c) -3 x + 5 = x + 1
d) -4 x + 2 = -1/2 x + 1
e) 2/3.x + 5 = -1 + x

EJERCICIO 11: Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Representar gráficamente el conjunto solución:

a) x + y = 0
b) 2x – y = 0
c) 2x – y = 1
d) –x + y = -1
e) ½ x + 2 y = -1
f) – 3 x + 4 y = 0

EJERCICIO 12: Resolver analítica y gráficamente los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 5y = 1 \\ -2x + 10y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1/2x + y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 5y = 1 \\ -2x + 10y = -2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 5y = 1 \\ -2x + 10y = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ -3x - 10y = -1 \end{cases}$

EJERCICIO N° 13: indique para que valores del coeficiente “k” el sistema no tiene solución.

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 2y = k \end{cases}$$

EJERCICIO N° 14: indique para que valores del coeficiente “k” del sistema del apartado 7, el sistema tiene infinitas soluciones.

5 - PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1) Un móvil se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniforme. En la siguiente tabla se expresan los valores de posición (x) en metros en el instante (t) en segundos:

t (s)	x (m)
2	100
4	200
6	300
10	500
14	700

a) Representar en un sistema de coordenadas (x, t) el movimiento del vehículo.
b) Indique la velocidad del mismo. (Recordar que la velocidad en MRU es la pendiente de la recta)
c) Indique la posición del móvil en el instante t = 20 segundos.

2) Un móvil se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniforme. En la siguiente tabla se expresan los valores de posición (x) en metros en el instante (t) en segundos:

t (s)	x (m)
0	100
2	200
4	300
8	500
12	600

d) Representar en un sistema de coordenadas (x, t) el movimiento del vehículo.
e) Indique la velocidad del mismo. (Recordar que la velocidad en MRU es la pendiente de la recta)
f) Indique la posición del móvil en el instante t = 20 segundos.

3) Un móvil se desplaza con Movimiento Rectilíneo Uniforme a una velocidad v = 10 m/s. Representar el movimiento en un sistema de coordenadas posición x [m], instante t [s] considerando que el origen del sistema corresponde a desplazamiento cero.

4) Un móvil se desplaza de oeste a este con Movimiento Rectilíneo Uniforme a una velocidad v=10m/s. Representar el movimiento en un sistema de coordenadas posición x [m], instante t [s] considerando que en el instante t = 0 seg. el móvil se encuentra 100 m al oeste

del origen del sistema de coordenadas. ¿Cómo sería el gráfico si el vehículo se encuentra 50 m al este del origen del sistema de coordenadas en el instante t = 0?

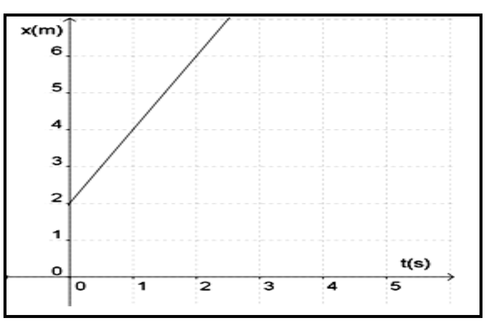
5) Un móvil se desplaza de oeste a este con Movimiento Rectilíneo Uniforme a una velocidad v=20m/s. Representar el movimiento en un sistema de coordenadas posición x [m], instante t [s] considerando que el desplazamiento del móvil empieza 100 m al este del origen del sistema de coordenadas. Comparar resultados con problemas 2, 3 y 4.

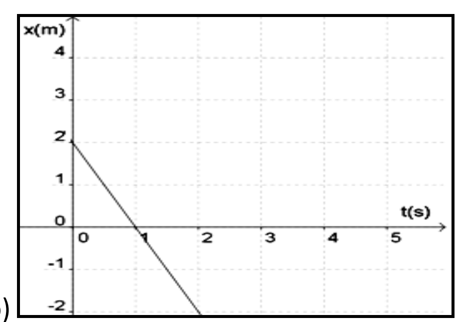
6) Dos móviles se desplazan de oeste a este. Si el primer móvil empieza el movimiento 20 m al este del origen del sistema de coordenadas a una velocidad de 5 m/s, y el segundo móvil empieza el movimiento en el origen del sistema de coordenadas a una velocidad de 10 m/s, calcular el tiempo que demora el segundo móvil en alcanzar al primero y la posición x del encuentro.

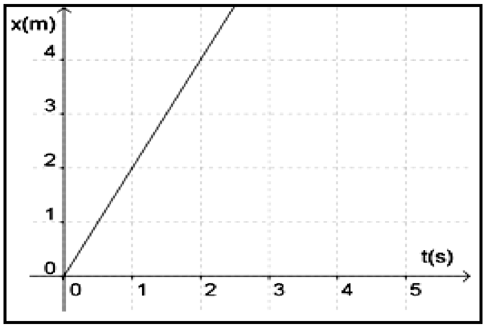
7) Dos móviles se desplazan en sentido contrario. Si originalmente se encuentran separados 140 m, y ambos móviles se desplazan a igual velocidad v = 20 m/s, calcular analítica y gráficamente el lugar de encuentro.

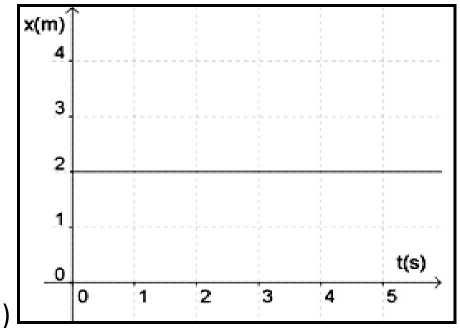
8) Dos móviles se desplazan en sentido contrario. Si originalmente se encuentran separados 200 m y se desplazan a velocidades de 20 m/s y 10 m/s cada uno de ellos, calcular analítica y gráficamente el lugar de encuentro.

9) Indique cuál de los siguientes gráficos correspondientes a funciones lineales representa un Movimiento Rectilíneo Uniforme

a) 

b) 

b) 

d) 

10) Deducir las ecuaciones x = f(t) correspondientes a los gráficos del apartado anterior

OTROS PROBLEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1) La suma de dos números impares consecutivos es igual a 736. ¿Cuáles son dichos números?

2) La suma de tres números consecutivos es 111. ¿Cuáles son dichos números?

3) Un padre tiene el doble de la edad de su hijo, y el doble de la suma de las dos edades es 120. ¿Qué edad tiene el padre y qué edad el hijo?

4) He comprado dos libros y un compás por $ 74. Si un libro cuesta la mitad del otro, y el compás $ 10 más que el libro más caro, ¿Cuánto pagué por cada artículo?

5) Juan y Pedro son mellizos. Julio tiene 2 años más que ellos y la suma de las tres edades da 23. ¿Qué edad tiene Julio?

PROBLEMAS SOBRE FUNCION LINEAL

1) Un técnico en computadora cobra $ 10 por la visita a domicilio, mas $ 12 por hora trabajada. Se desea determinar:

a-¿ Cuál es la expresión que permite calcular el importe a cobrar?

b- Si trabaja durante 6 hs., ¿Cuál es el importe a cobrar?

c- Si hubiera cobrado $ 106, ¿Cuántas horas habría trabajado?

d- Realice el gráfico correspondiente indicando pendiente y ordenada al origen.

2) Un remisero cobra $ 2,50 la bajada de bandera, mas $ 1,10 por cada Kilómetro recorrido, se pide:

a- ¿Cuál es la expresión que permite calcular la tarifa a cobrar?

b- Si un cliente viajó 5 Kilómetros, ¿Qué tarifa cobró el remisero?

c- Si en un viaje cobró $ 13,50, ¿Cuántos Kilómetros ha recorrido?

d- Realice el gráfico correspondiente indicando pendiente y ordenada al origen.

GUIA DE ESTUDIO N° 5

TEMA: ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO. FUNCIÓN CUADRÁTICA

1 - LA FUNCIÓN CUADRÁTICA. LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

La función cuadrática o de segundo grado es una función de la forma f(x) = ax^2 + bx + c donde "a", "b" y "c" son constantes. La gráfica que representa la función cuadrática se denomina parábola, que es una curva simétrica cuyos puntos notables son las intersecciones con el eje de abcisas, la ordenada del origen y el vértice.

El dominio de una función cuadrática de la forma f(x) = ax^2 + bx + c está representado por el conjunto R, mientras que el codominio o imagen está determinado por la ordenada del vértice yv ya sea la parábola con ramas hacia arriba (Codominio R ≥ yv) o hacia abajo (Codominio R ≤ y_v).

Si hacemos f(x) = 0 se obtiene una ecuación de la forma = ax^2 + bx + c = 0, que es una ecuación de segundo grado. El cálculo de las soluciones "x" que verifican la ecuación de segundo grado se realiza a través de la fórmula respectiva:

$$x = \frac{-b +/- \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO

Sea la función cuadrática f(x) = $2x^2$ + 8x + 6 . Indicar

a) Raíces o ceros de la función f(x).
b) Ordenada del origen
c) Coordenadas del vértice de la parábola.
d) Eje de simetría
e) Dominio y codominio

RESOLUCION

a) Raíces de la ecuación de segundo grado $2x^2$ + 8x + 6 = 0. Se obtienen con la fórmula general:

$$x = \frac{-8 +/- \sqrt{8^2 - 4.2.6}}{2.2} = \frac{-8 +/- 4}{4}$$

La raíces son x= -1 y x = -3

b) La ordenada del origen es y = 6 (Se obtiene de hacer en la ecuación cuadrática x = 0)

c) Las coordenadas del vértice son:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2.2} = -2$$

$$y_v = 2.(-2)^2 + 8(-2) + 6 = -2$$

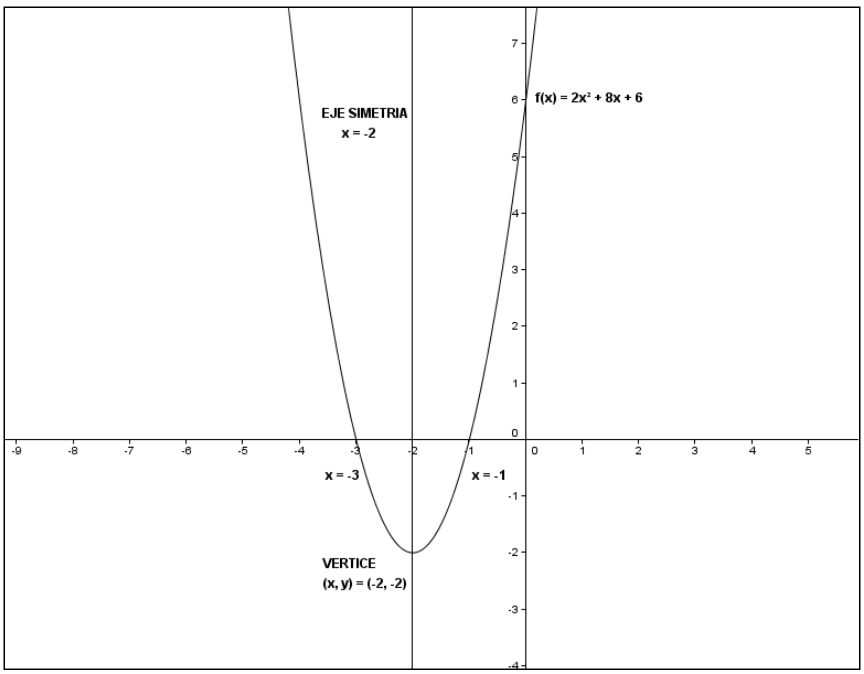
Las coordenadas del vértice son (x, y)= (-2, -2)

d) El eje de simetría está determinado por la coordenada de $x_v = -2$

e) Dominio D = R

Codominio C = R ≥ -2 (Lo determina la coordenada y_v del vértice)

GRAFICO



CUADRO RESUMEN

Función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Ecuación de Segundo Grado	$ax^2 + bx + c = 0$
Raíces de la ecuación	$x = \dfrac{-b+/-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Coordenadas del Vértice	$x_v = \dfrac{-b}{2a}$ $y_v = ax_v^2 + bx_v + c$

Dominio R

Codominio $R \geq y_v$ Si a > 0

$R \leq y_v$ Si a < 0

Eje de simetría $x = x_v$

FORMA POLINOMICA DE LA PARABOLA
$f(x) = ax^2 + bx + c$

FORMA FACTORIZADA
$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$

FORMA CANÓNICA
$f(x) = a.(x - x_v) + y_v$

Actividad 1: Sean las funciones cuadráticas siguientes a) $y = x^2 - 4x + 3$; b) $y = x^2 - 6x + 9$;
c) $y = x^2 - 6x + 10$
Realizar las gráficas correspondientes, comparando resultados y analizando conjuntamente las soluciones de las ecuaciones de segundo grado respectivas.

2 - GUIA DE EJERCICIOS

EJERCICIO 1: Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

g) $x^2 - 1 = 0$
h) $2x^2 - 8 = 0$
i) $3x^2 - 27 = 0$
j) $x^2 - x = 0$
k) $2x^2 - 4x = 0$
l) $2x^2 + 4x = 0$
m) $x^2 + 1 = 0$
n) $2x^2 + 1 = 0$

EJERCICIO 2: Resolver, indicando la naturaleza de las raíces, las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $x^2 - 9x + 18 = 0$
c) $x^2 + 7x + 12 = 0$
d) $x^2 + 9x + 20 = 0$
e) $x^2 -6x + 9 =0$
f) $x^2 -6x + 8 = 0$
g) $x^2 +6x + 8 = 0$
h) $x^2 +2x - 15 = 0$
i) $4x^2 -26x -14 = 0$
j) $6x^2 -12x + 6 = 0$
k) $x^2 +7x - 18 = 0$
l) $x^2 - 6x + 9 = 0$
m) $x^2 + 6x + 9 = 0$
n) $x^2 + 8x + 16 = 0$
o) $x^2 - 14x + 49 = 0$

EJERCICIO 3: Graficar las siguientes funciones cuadráticas, indicando ordenada del origen, las coordenadas del vértice y eje de simetría.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9 = 0$
b) $f(x) = x^2 + 4x + 4 = 0$
c) $f(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$
d) $f(x) = x^2 - 6x + 10 = 0$
e) $f(x) = 2x^2 + 8x + 6 = 0$
f) $f(x) = - x^2 + 8x - 12 = 0$
g) $f(x) = -x^2 + 8x - 20 = 0$

EJERCICIO 4: Indique dominio y codominio de las funciones cuadráticas del apartado anterior.

EJERCICIO 5: Escribir las funciones cuadráticas del apartado 3 en forma canónica y factorizada.

EJERCICIO N° 6: Indique una función cuadrática cuyos ceros o raíces sean 2 y 6 cuya ordenada del origen sea y = 4.

EJERCICIO N° 7: Indique una función cuadrática cuyos ceros o raíces sean 2 y 6 y su vértice tenga las coordenadas (4, -4). P(4)=-4.

EJERCICIO N° 8: Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado

a) $x\ (x+2)-2 = x\ (-x-4)+6$

b) $5\,x\ (x+3)+14 = 2\,x\ (x-3)-16$

c) $3\,x\ (x-2)-4 = x\ (x+6)-20$

d) $\frac{2\,x-2}{x-1} = \frac{x+3}{x}$

e) $\frac{x-3}{-x-3} = \frac{2\,x}{x+3}$

f) $\frac{x}{x-3} = \frac{x-2}{2\,x}$

g) $2\,x^2+\ 5\,x-4 = 3\,x^2-3\,x+8$

3 – PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Sea un proyectil que se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_o=20 m/s. Siendo la ecuación h = f(t) del movimiento uniformemente acelerado $h(t) = h_o + v_o.t + 1/2.\ g.t^2$, se solicita:

a) Determine el instante t en que el proyectil alcanza la altura máxima.

b) Determine la altura máxima que alcanza el proyectil.

c) Determine el instante en que el proyectil cae a tierra nuevamente.

d) Realizar una gráfica x = f (t) de la posición del proyectil en función del tiempo.

Considere:
g = 10 m/s^2 (Aceleración de la gravedad)
h_o = 0 m (Altura Inicial)
v_o = 20 m/s (Velocidad de lanzamiento)
h – Altura del proyectil en metros

GUIA DE ESTUDIO N° 6

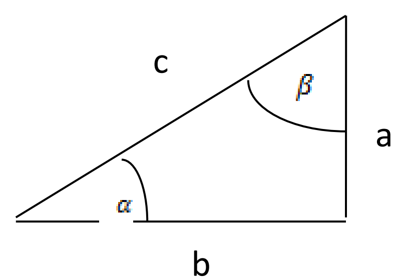
TEMA: RELACIONES TRIGONOMETRICAS EN UN TRIANGULO RECTANGULO

1 - RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIANGULO RECTANGULO

Triángulo Rectángulo: Es un triángulo que posee un ángulo recto (igual a 90 °), y dos ángulos agudos (α y β). A su vez, los lados del triángulo reciben distintos nombres para un ángulo dado. El lado más largo del triángulo se denomina hipotenusa, mientras que el lado que se halla frente al ángulo considerado se llama cateto opuesto, y el lado de menor longitud que limita a un ángulo (el otro es la hipotenusa), recibe el nombre de cateto adyacente.

Razones Trigonométricas: Las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo, como el de la figura, quedan definidas como razones o cocientes entre los lados del triángulo, de la siguiente manera:

Funciones Trigonométricas Principales (del ángulo α):



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} = \frac{a}{b}$$

Funciones Trigonométricas Secundarias o Recíprocas (del ángulo α):

$$\sec\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Opuesto} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{Cateto\ Adyacente}{Cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

Funciones Trigonométricas Principales (del ángulo β):

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} = \frac{a}{b}$$

Resolución de Triángulos Rectángulos.

En la resolución de un triángulo rectángulo siempre se conocen dos datos, los cuales pueden ser: dos lados; o un lado y un ángulo. Para resolverlo, es decir, hallar el valor de los otros tres elementos que faltan, se deben aplicar tres conceptos importantes, a saber:

A) Definición de las funciones trigonométricas (ya vistas).
B) Teorema de Pitágoras.
C) Propiedad de los ángulos agudos.

B) Teorema de Pitágoras:

El mismo afirma que: “En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”. En símbolos, con referencia a la figura anterior:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} c = \sqrt{a^2 + b^2} \\ a = \sqrt{c^2 - b^2} \\ b = \sqrt{c^2 - a^2} \end{cases}$$

Las tres fórmulas que se incluyen en la llave, nos permiten calcular uno cualquiera de los lados, conociendo los otros dos.

C) Propiedad de los ángulos agudos:

La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a un recto:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 90^\circ - \beta \\ \\ \beta = 90^\circ - \alpha \end{cases}$$

Las fórmulas que se incluyen en la llave, nos permiten calcular uno cualquiera de los ángulos agudos, conociendo el valor del otro.

2 – GUIA DE EJERCICIOS

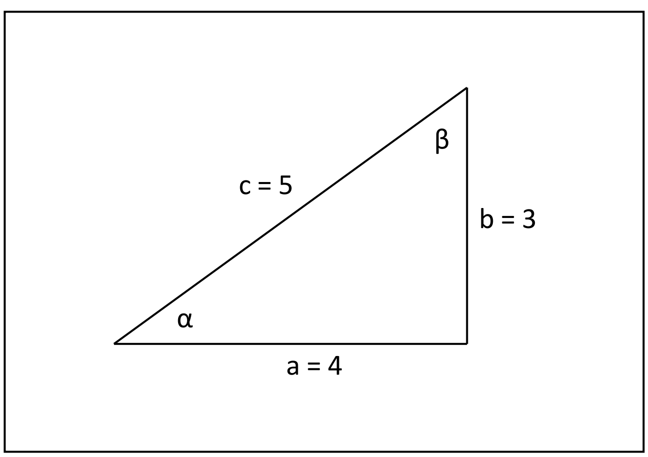
EJERCICIO 1: Realizar las siguientes conversiones de unidades de medición de ángulos:

a) 30° a Radianes
b) 90° a Radianes
c) 135° a Radianes
d) 2π radianes a °
e) 3/4 π radianes a °
f) 7/8 π radianes a °

EJERCICIO 2: Graficar las siguientes funciones trigonométricas, indique dominio y codominio de cada una de ellas:

a) f(x) = sen x
b) f(x) = cos x
c) f(x) = tg x
d) f(x) = 2.sen x
e) f(x) = sen 2x
f) f(x) = sec x
g) f(x) = cosec x

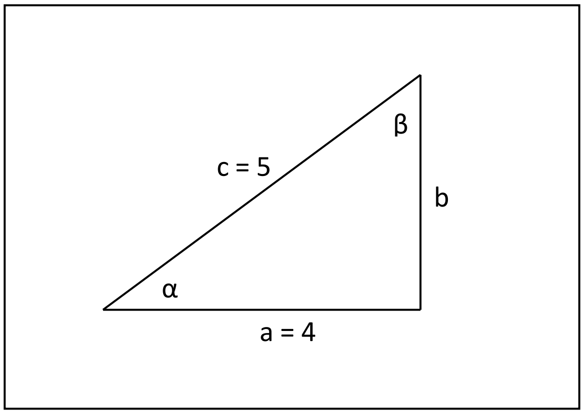
EJERCICIO 3: Sea el triángulo rectángulo de la figura indique los valores seno, coseno y tangente para los ángulos α y β. Comparar resultados



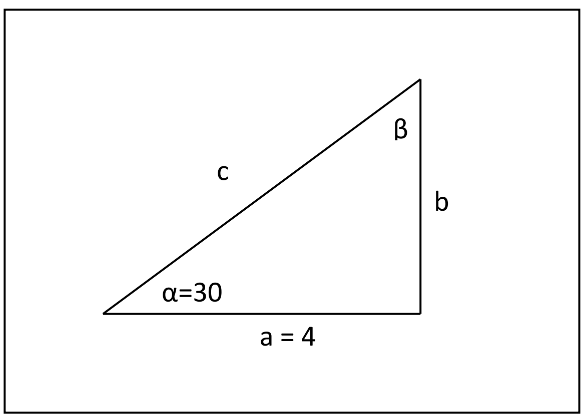
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA Y CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA

3 - PROBLEMAS DE APLICACIÓN

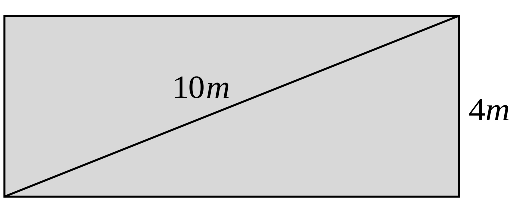
1) Calcular los valores de las incógnitas α, β y b del triángulo rectángulo de la figura.



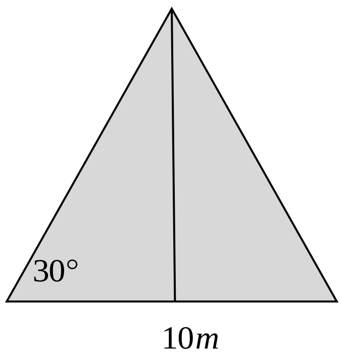
2) Calcular los valores de los elementos desconocidos del triángulo rectángulo de la figura



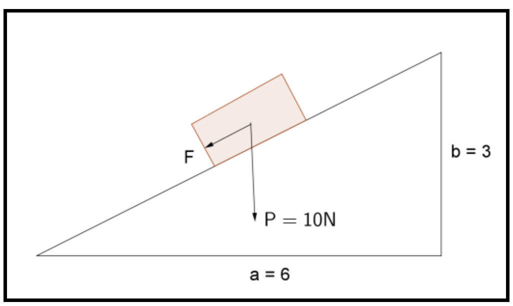
3) Calcular el área del rectángulo de la figura



4) Calcular el área del triángulo isóceles de la figura:



5) Descomponer el peso del cuerpo apoyado en el plano inclinado en una dirección paralela y otra dirección normal al plano.



6) Una escalera de 7 m de largo está apoyada en una pared, formando con el piso un ángulo de 35° 18’ 21’’. ¿A qué altura de la pared está apoyada la escalera?

7) Calcular cuántos metros de fleco se necesitan para adornar los bordes de un barrilete romboidal, si el eje mayor forma con uno de los lados un ángulo de 32° 43’, y tiene una longitud de 80 cm.

8) Calcular el ángulo que forma con el piso un cable carril sabiendo que el tramo que une a dos puntos de 598 m y 754m de altura, mide 250 m de largo.

9) Sabiendo que una cuadra mide exactamente 100 m, cuánto mide la diagonal de una plaza?